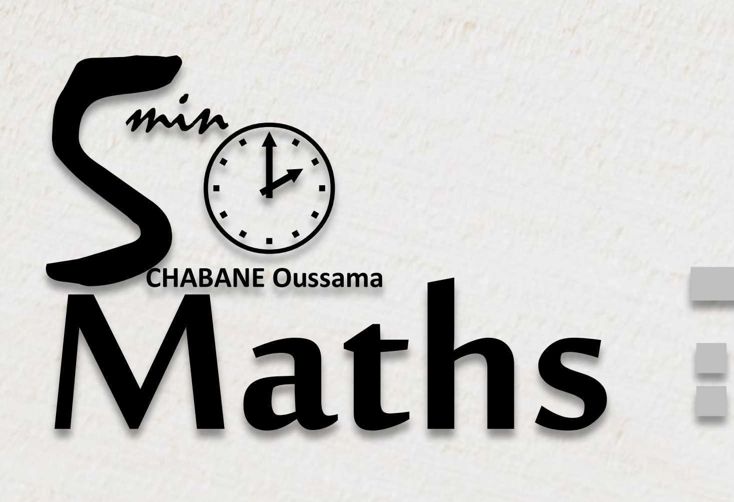


مجلة Bac 2021

الدالة الأسية
Fonction Exponentielle

ملخص

تطبيقات

تمارين محلولة

تمارين البكالوريا

علوم تجريبية/ تقني رياضي/ رياضيات

من اعداد الأستاذ شعبان أسامة

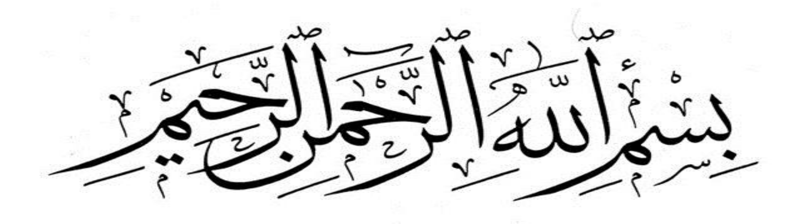


شكر خاص للأستاذ بخاخشة خالد

Google / Facebook/ Telegram/ Instagram : 5min maths

تلمسان-0775737163

اصدار 04ديسمبر 2020



اليك أيها الطالب " مجلة 5min Maths" للسنة الثالثة ثانوي الشعب العلمية لمحور الدالة الأسية

وفق المنهاج الرسمي الجديد

جاء هذا الملف شامل قصد مساعدتك على التحضير الجيد للبكالوريا لدورة 2021، أرجو عدم قراءة حلول التمارين المطروحة بل التفكير في الحل الذاتي أولا ثم مقارنته مع الحل المقترح مع العلم أنه ليس الحل الوحيد و ربما يكون حلك أحسن و أقصر لكن النتائج و الأهداف واحدة ,

في الأخير نرجوا من الله القدير أن يوفقك الى ما فيه نجاحك و يهديك الى سبيل الخير

أهدي هذا العمل المتواضع لعائلتي الكريمة أولا

و ثانيا لجميع تلامذتي خاصة تلاميذ ثانوية بوحميدي الطاهر

الأستاذ شعبان أسامة



شكر خاص للأستاذ بخاخشة خالد على تعاونه معي في انجاز هذا العمل المتواضع

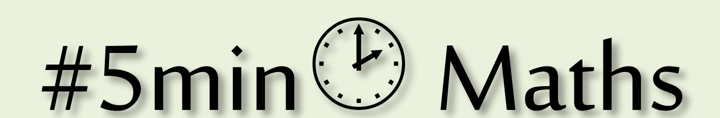
مجلة الرياضيات للطور الثانوي بمختلف
مستوياته الثلاثة،تم اصدار أول نسخة
بتاريخ :2019/09/13



CHABANE Oussama

تجدون في هذا العمل

1. ملخص الدرس
2. تطبيقات
3. تمارين محلولة
4. تمارين البكالوريا 2008-2019



① ملخص الدرس

مبرهنة وتعريف:	توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f'=f$ و $f(0)=1$. نرمز إلى هذه الدالة بالرمز " exp " و نسميها الدالة الأسية (النيبيرية).
ملاحظة:	الدالة الأسية هي إذن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $y'=y$ التي تحقق $y(0)=1$. نتائج: * $\exp(0)=1$.
خواص:	من أجل كل عدد حقيقي x، من أجل كل عددين حقيقيين x، y و من أجل كل عدد صحيح نسبي n لدينا: (1) $\exp(x)\neq 0$ (2) $\exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}$ (3) $\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y)$. (4) $\exp(x-y)=\dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$. (5) $\exp(nx)=[\exp(x)]^n$.
العدد e و الترميز e^x	• العدد e هو صورة العدد 1 بالدالة الأسية أي $e=\exp(1)$. تعطينا الحاسبة $e\approx 2{,}718281828$. • من أجل كل عدد صحيح نسبي n، $\exp(n)=\exp(n\times 1)=[\exp(1)]^n$. لدينا إذن: من أجل كل عدد صحيح نسبي n، $\exp(n)=e^n$. اصطلاحا نرمز، من أجل كل عدد حقيقي x، إلى $\exp(x)$ بِ e^x. من أجل كل عدد حقيقي x، $\exp(x)=e^x$ تقرأ e^x: " أسية x ".
قواعد الحساب:	من أجل كل عددين حقيقيين x، y و من أجل كل عدد صحيح نسبي n لدينا: • $e^0=1$ • $\exp'(x)=e^x$ • $e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$ • $e^{x+y}=e^xe^y$ • $e^{x-y}=\dfrac{e^x}{e^y}$ • $e^{nx}=(e^x)^n$
خواص	الدالة الأسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$. من أجل كل عدد حقيقي x، $e^x>0$.
نتائج:	• من أجل كل عددين حقيقيين a و b لدينا: $e^a<e^b$ يعني $a<b$ و $e^a=e^b$ يعني $a=b$. • من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $0<e^x<1$ يعني $x<0$ و $e^x>1$ يعني $x>0$.
النهايات	(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$. (2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$. مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ $f(x)=e^{-x+2}$. • لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x+2)=+\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x+2}=+\infty$ أي $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$. • لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x+2)=-\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x+2}=0$ أي $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.
النهايات الشهيرة	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^n}=+\infty$ .... $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^ne^x=0$ .... $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

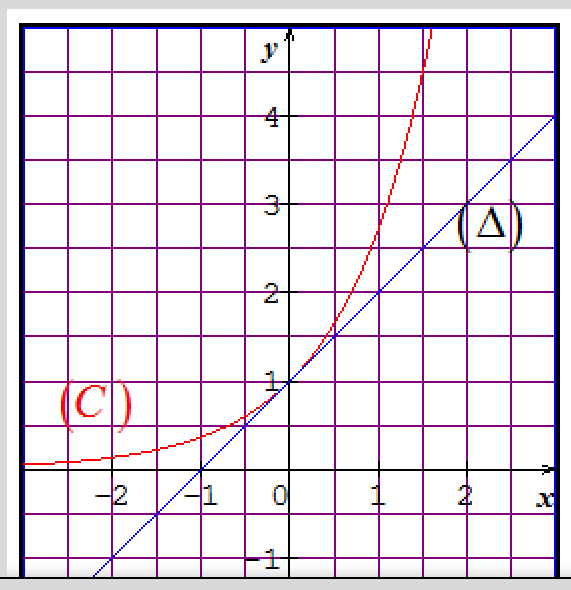
جدول تغيرات

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$	
e^x	0	1 ↗	$+\infty$

التمثيل البياني

- المنحني (C) الممثل للدالة الأسية يقبل محور الفواصل كمستقيم مقارب لما يؤول x إلى $-\infty$.
- لدينا $\exp'(0)=1$ و $e^0=1$. إذن يقبل المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 مماسا $(\Delta):y=x+1$.
- من تعريف العدد المشتق لدينا: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{exp(0+x)-\exp(0)}{x}=\exp'(0)=1$ إذن: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

نتيجة: الدالة $x\mapsto 1+x$ هي أحسن تقريب تآلفي للدالة $x\mapsto e^x$ بجوار 0. أي من أجل x قريب من 0 لدينا: $e^x\approx 1+x$.



خاصية:

إذا كانت u دالة معرفة على مجال I فإن للدالتين u و $\exp\circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I.

مثال:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{x^2-1}$.

نلاحظ أن $f=\exp\circ u$ حيث u هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $u(x)=x^2-1$.

بما أن الدالة u متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$.

وبما ان الدالة u متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

المشتقة

خاصية: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $\exp\circ u$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا من أجل كل x من I، $(\exp\circ u)'(x)=u'(x)e^{u(x)}$.

مثال:

- مشتقة الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{x^2+x+1}$ هي $f'(x)=(2x+1)e^{x^2+x+1}$.
- مشتقة الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $g(x)=e^{\frac{1}{x}}$ هي $g'(x)=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$.



01

حل المعادلة و المتراجحة التاليتين:

$$e^{x^2+3x-3}=e^{2x-1}\quad(1)\quad \text{و}\quad e^{5x+3}>e^{3x-1}\quad(2)$$

02

حل المعادلة و المتراجحتين التالية:

$$e^{2x-1}=3\quad(1)\ ،\ e^{x+2}\geq -5\quad(2)\ ،\ e^{x+2}\geq 3\quad(3)$$

03

حل المعادلة و المتراجحة التاليتين:

$$\ln(2x-1)=2\quad(1)\quad \text{و}\quad \ln(2x-1)\leq 2\quad(2)$$

04

حل المعادلة و المتراجحة التاليتين:

$$e^{x+2}e^{2x-3}=5\quad(1)\quad \text{و}\quad e^{-2x+1}>\frac{1}{2}e^{-x+1}\quad(2)$$

05

حل المعادلة و المتراجحة التاليتين:

$$e^{2x}-e^{x}-6=0\quad(1)\quad \text{و}\quad e^{2x}-e^{x}-6>0\quad(2)$$

06

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=2+e^{-2x+3}$

1. عين نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f .

07

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ و ليكن (C) منحنيها البياني.

1. عين نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها. استنتج المستقيمات المقاربة للمنحنى (C).
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها. أرسم المنحنى (C) في معلم متعامد و متجانس.

08

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=e^{2+\ln x}$

أدرس نهايتي الدالة f عند 0 و عند $+\infty$.

09

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\ln\left(e^{2x}+1\right)$ و ليكن (C) منحنيها البياني.

1. أحسب $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f.
2. عين نقط المنحنى (C) التي يكون عندها المماس موازيا للمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=\dfrac{x}{3}$

10

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x+\dfrac{4}{1+e^x}$

1. احسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.
2. أ- احسب $f'(x)$ حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f .
ب- ادرس إشارة $f'(x)$ و شكل جدول تغيرات الدالة f .

3. نرمز بـ $(\mathscr{C})$ إلى التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ أ- بين أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل المستقيم D الذي معادلته $y=x$ كمقارب مائل عند $+\infty$ ، و يقبل المستقيم D' الذي معادلته $y=x+4$ كمقارب مائل عند $-\infty$. ب- ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة إلى كل من D و D' 4. بين أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقطع محور الفواصل في نقطة واحدة فاصلتها α حيث $\alpha\in\left]-4;-3\right[$. 5. ارسم $(\mathscr{C})$.	
نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ 1. بين أن الدالة f فردية. 2. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(2x)=\dfrac{2f(x)}{1+\left[f(x)\right]^2}$	11
نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}$ 1. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(-x)+f(x)=2$. فسر بيانيا النتيجة. 2. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)=\dfrac{4e^x}{e^x+1}-1$	12
مبرهنة: ليكن k عددا حقيقيا. الدوال f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f'=kf$ هي الدوال: $x\mapsto Ce^{kx}$ حيث C عدد حقيقي ثابت. 1. أنجز برهانا لهذه المبرهنة. 2. عين كل الدوال f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f'(x)-2f(x)=0$. 3. من بين الدوال f حيث $f'(x)-2f(x)=0$ عين تلك التي منحناها البياني يمر من النقطة $A\left(\dfrac{1}{2};e^2\right)$.	13

01

المعادلة $e^{u(x)}=e^{v(x)}$ تعني $u(x)=v(x)$.

المتراجحة $e^{u(x)}>e^{v(x)}$ تعني $u(x)>v(x)$.

(1) تعني $x^2+3x-3=2x-1$ أي $x^2+x-2=0$ و لهذه المعادلة الأخيرة حلان هما 1 و -2.

مجموعة حلول المعادلة (1) هي إذن $S=\{-2;1\}$.

(2) تعني $5x+3>3x-1$ أي $x>-2$.

مجموعة حلول المتراجحة (2) هي إذن $S=]-2;+\infty[$.

02

- لحل المعادلة $e^{u(x)}=\lambda$ حيث $\lambda>0$ يكفي حل المعادلة $u(x)=\ln(\lambda)$.
- لحل المتراجحة $e^{u(x)}\geq\lambda$ حيث $\lambda>0$ يكفي حل المتراجحة $u(x)\geq\ln(\lambda)$.

(1) تعني $2x-1=\ln 3$ أي $x=\dfrac{1+\ln 3}{2}$. مجموعة الحلول هي إذن $S=\left\{\dfrac{1+\ln 3}{2}\right\}$.

من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $e^{x+2}>0$ و منه $e^{x+2}>-5$. مجموعة حلول المتراجحة (2) هي إذن $S=\mathbb{R}$.

(3) تعني $x+2\geq\ln 3$ أي $x\geq\ln(3)-2$. مجموعة الحلول هي إذن $S=[\ln(3)-2;+\infty[$.

03

لحل المعادلة $\ln[u(x)]=\lambda$ على التوالي المتراجحة $\ln[u(x)]\leq\lambda$ نقوم أولا بتعيين D مجموعة الأعداد الحقيقية التي تكون الدالة u معرفة من أجلها مع $u(x)>0$ ثم نحل في المجموعة D المعادلة $u(x)=e^{\lambda}$ على التوالي $u(x)\leq e^{\lambda}$.

D هي مجموعة الأعداد الحقيقية x بحيث $2x-1>0$ أي $x>\dfrac{1}{2}$ و منه $D=\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.

من أجل كل x من D، (1) تعني $2x-1=e^2$ أي $x=\dfrac{e^2+1}{2}$. مجموعة الحلول هي إذن $S=\left\{\dfrac{e^2+1}{2}\right\}$.

من أجل كل x من D، (2) تعني $2x-1\leq e^2$ أي $x\leq\dfrac{e^2+1}{2}$. مجموعة الحلول هي إذن $S=\left]\dfrac{1}{2};\dfrac{e^2+1}{2}\right]$.

04

1. (1) تعني $e^{(x+2)+(2x-3)}=5$ أي $e^{3x-1}=5$ و هذا يعني $3x-1=\ln 5$ أي $x=\dfrac{1+\ln 5}{3}$

مجموعة حلول المعادلة (1) هي إذن: $S=\left\{\dfrac{1+\ln 5}{3}\right\}$

2. (2) تعني $\dfrac{e^{-2x+1}}{e^{-x+1}}>\dfrac{1}{2}$ لأن $e^{-x+1}>0$ لدينا: $\dfrac{e^{-2x+1}}{e^{-x+1}}=e^{(-2x+1)-(-x+1)}=e^{-2x+1+x-1}=e^{-x}$

و منه $\dfrac{e^{-2x+1}}{e^{-x+1}}>\dfrac{1}{2}$ تعني $e^{-x}>\dfrac{1}{2}$ أي $-x>\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$ و هذا يعني $-x>-\ln 2$ أي $x<\ln 2$.

مجموعة حلول المتراجحة (2) هي إذن: $S=]-\infty;\ln 2[$.

05

لحل معادلة من الشكل $ae^{2x}+be^{x}+c=0$ أو متراجحة من الشكل $ae^{2x}+be^{x}+c>0$:

- نضع $X=e^{x}$ ثم نحل المعادلة $aX^{2}+bX+c=0$ أو المتراجحة $aX^{2}+bX+c>0$.
- نعين قيم x انطلاقا من العلاقة $X=e^{x}$.

1. بوضع $X=e^{x}$ نحصل على المعادلة ذات المجهول X التالية: $X^{2}-X-6=0$.

لدينا $\Delta=25$ و منه حلول المعادلة $X^{2}-X-6=0$ هما: $X'=-2$ و $X''=3$.

- $e^{x}=-2$ لا تقبل حلولا لأن $e^{x}>0$.
- $e^{x}=3$ تعني $x=\ln 3$.

مجموعة حلول المعادلة (1) هي إذن: $S=\{\ln 3\}$.

2. بوضع $X=e^{x}$ نحصل على المتراجحة ذات المجهول X التالية: $X^{2}-X-6>0$.

للمعادلة $X^{2}-X-6=0$ جذران هما -2 و 3. و بالتالي فإشارة $X^{2}-X-6$ هي كالآتي:

X	$-\infty$ $\quad -2 \quad$ 3 $\quad +\infty$
$X^{2}-X-6$	$+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$

حلول المتراجحة $X^{2}-X-6>0$ هي إذن الأعداد الحقيقية X بحيث: $X<-2$ أو $X>3$.

- $e^{x}<-2$ لا تقبل حلولا لأن $e^{x}>0$.
- $e^{x}>3$ تعني $x>\ln 3$.

مجموعة حلول المتراجحة (2) هي إذن: $S=]\ln 3;+\infty[$.

06

1. $\lim_{x\to-\infty}(-2x+3)=+\infty$ و بما أن $\lim_{X\to+\infty}e^{X}=+\infty$ فإن $\lim_{x\to+\infty}e^{-2x+3}=+\infty$ و منه $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

$\lim_{x\to+\infty}(-2x+3)=-\infty$ و بما أن $\lim_{X\to-\infty}e^{X}=0$ فإن $\lim_{x\to-\infty}e^{-2x+3}=0$ و منه $\lim_{x\to-\infty}f(x)=2$.

2. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=-2e^{-2x+3}$.

بما أن $e^{-2x+3}>0$ فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)<0$.

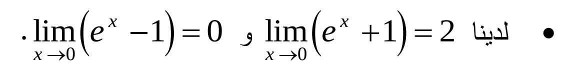
إذن الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

07

- لدينا $\lim_{x\to-\infty}e^{x}=0$ و منه $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x}+1}{e^{x}-1}=-1$ إذن $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-1$.
- نعلم أن $\lim_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$ و منه لدينا حالة عدم التعيين.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{e^{x}}}{1-\frac{1}{e^{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}\left(1+\frac{1}{e^{x}}\right)}{e^{x}\left(1-\frac{1}{e^{x}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$$

و بما أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x}}=0$ فإن $\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$.



- لدينا $\lim_{x\to0}(e^{x}+1)=2$ و $\lim_{x\to0}(e^{x}-1)=0$.

نعلم أن $e^{x}<1$ يعني $x<0$ و $e^{x}>1$ يعني $x>0$

و بالتالي $\lim_{x\overset{<}{\to}0}f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\overset{>}{\to}0}f(x)=+\infty$.

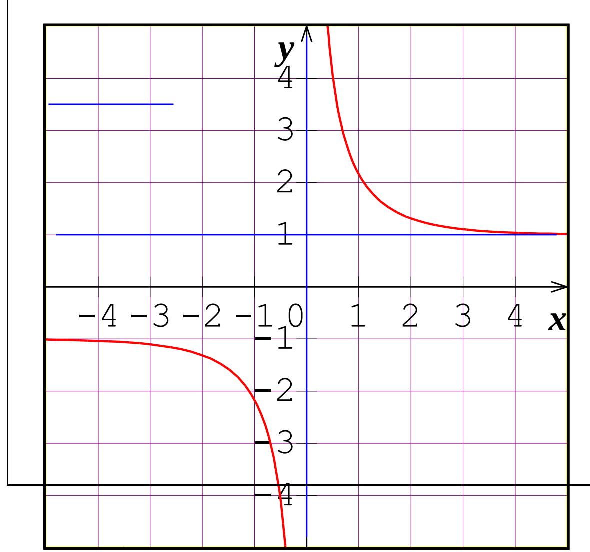
يقبل المنحنى (C) ثلاث مستقيمات مقاربة معادلاتها:

$x=0$، $y=-1$ و $y=1$.

2) f قابلة للاشتقاق على المجالين $]-\infty;0[$ ، $]0;+\infty[$

و لدينا $f'(x)=\frac{-2e^{x}}{(e^{x}-1)^{2}}$ و بالتالي فالدالة f

متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;0[$ ، $]0;+\infty[$.



يمكنك إثبات أن الدالة f فردية.

08

- لدينا: $\lim_{x\to 0}(2+\ln x)=-\infty$ لأن $\lim_{x\to 0}(\ln x)=-\infty$ و بما أن $\lim_{X\to -\infty} e^{X}=0$ فإن $\lim_{x\to 0} e^{2+\ln x}=0$

و بالتالي $\lim_{x\to 0} f(x)=0$

- لدينا: $\lim_{x\to +\infty}(2+\ln x)=+\infty$ لأن $\lim_{x\to +\infty}(\ln x)=+\infty$ و بما أن $\lim_{X\to +\infty} e^{X}=+\infty$ فإن $\lim_{x\to +\infty} e^{2+\ln x}=+\infty$

و بالتالي $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

يمكن ملاحظة أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f(x)=e^{2+\ln x}=e^2e^{\ln x}=e^2x$

09

1. من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=\dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}$.

بما أن $e^{2x}>0$ فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)>0$ و منه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

2. يكون المماس عند نقطة من (C) فاصلتها x موازيا للمستقيم (Δ) يعني $f'(x)=\dfrac{1}{3}$

يكون لدينا إذن $\dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}=\dfrac{1}{3}$ أي $6e^{2x}=e^{2x}+1$ و هذا يعني $e^{2x}=\dfrac{1}{5}$ أي $2x=-\ln 5$ و منه $x=-\dfrac{\ln 5}{2}$

و بالتالي توجد نقطة وحيدة من (C) فاصلتها $x=-\dfrac{\ln 5}{2}$ يكون المماس عندها موازيا للمستقيم (Δ).

10

- بوضع $u(x)=2x+3$ يكون لدينا $u'(x)=2$

و منه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x)=\dfrac{1}{2}\times u'(x)e^{u(x)}$

و بالتالي تقبل الدالة f على $\mathbb{R}$ دوالا أصلية F معرفة كما يلي: $F(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x+3}+c$ حيث c عدد حقيقي ثابت.

- لدينا $g(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x+3}+c$ و $g(-1)=0$ و منه $\dfrac{1}{2}e^{2(-1)+3}+c=0$ أي $\dfrac{1}{2}e+c=0$ و بالتالي $c=-\dfrac{1}{2}e$.

نجد هكذا: $g(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x+3}-\dfrac{e}{2}$.

11

1. من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $(-x)$ ينتمي إلى $\mathbb{R}$ و لدينا:

$f(-x)=\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\dfrac{\frac{1}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1}=\dfrac{\frac{1-e^x}{e^x}}{\frac{1+e^x}{e^x}}=-\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=-f(x)$. إذن الدالة f دالة فردية.

2. $$\frac{2f(x)}{1+[f(x)]^2}=\frac{2\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)}{1+\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2}=\frac{2\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)}{\frac{(e^x+1)^2+(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}}=\frac{2\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)}{\frac{2(e^{2x}+1)}{(e^x+1)^2}}=\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)\frac{(e^x+1)^2}{(e^{2x}+1)}$$

و منه $$\frac{2f(x)}{1+[f(x)]^2}=\frac{(e^x-1)(e^x+1)}{(e^{2x}+1)}=\frac{(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)}=f(2x)$$

و هكذا نجد أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f(2x)=\dfrac{2f(x)}{1+[f(x)]^2}$

12

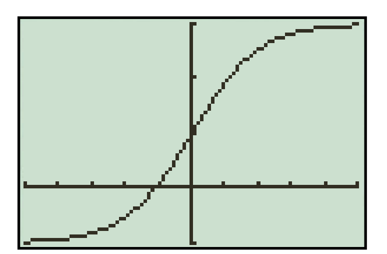
ليكن x عددا حقيقيا كيفيا.

.1 $\dfrac{2(e^x+1)}{e^x+1}=\dfrac{2e^x+2}{e^x+1}=\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}+\dfrac{3-e^x}{1+e^x}=\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}+\dfrac{e^x(3e^{-x}-1)}{e^x(e^{-x}+1)}=f(-x)+f(x)$.

و منه $f(-x)+f(x)=2$

المنحني الممثل للدالة f متناظر بالنسبة على النقطة $A(0;1)$.

.2 $\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{4e^x-e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{4e^x}{e^x+1}-1=f(x)$.



13

1. إذا كانت f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بِـ $f(x)=Ce^{kx}$ فإنها قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=C\times ke^{kx}=k\left(Ce^{kx}\right)=kf(x)$ و منه $f'=kf$.

<u>عكسيا</u> إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f'=kf$ نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^{kx}}$

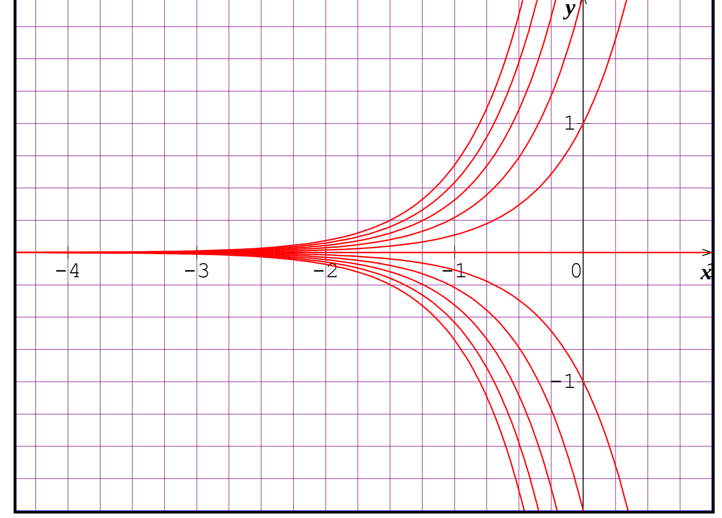
الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g'(x)=\dfrac{f'(x)e^{kx}-kf(x)e^{kx}}{e^{2kx}}=0$

و منه الدالة g ثابتة على $\mathbb{R}$. بوضع $g(x)=C$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ و بما أن $f(x)=g(x)e^{kx}$ يكون لدينا:

من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)=Ce^{kx}$.

.2 $f'(x)-2f(x)=0$ تعني $f'(x)=2f(x)$ و منه $f'=kf$ مع $k=2$.

الدوال f هي إذن الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=Ce^{2x}$ حيث C عدد حقيقي ثابت.



التمثيلات المقابلة هي لدوال f معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=Ce^{2x}$

.3 نبحث إذن عن الدالة f حيث $f(x)=Ce^{2x}$ مع $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=e^2$ و بما أن $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=Ce^{2\left(\frac{1}{2}\right)}=C\times e$

يكون لدينا $C\times e=e^2$ أي $C=e$. و منه $f(x)=e\times e^{2x}=e^{2x+1}$.

إذن الدالة الوحيدة f حيث $f'(x)-2f(x)=0$ و التي يمر منحناها البياني من النقطة $A\left(\dfrac{1}{2};e^2\right)$ هي الدالة:

$x\mapsto e^{2x+1}$

3 تمارين محلولة

التمرين الأول

I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل : $g(x)=1+x+e^x$

1 / ادرس تغيرات الدالة g

2 / برهن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلا وحيدا α. تحقق أن α من المجال $]-1.3;-1.2[$.

3 / حدد تبعا لقيم x إشارة $g(x)$ ، ثم استنتج إشارة $g(-x)$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x)=\dfrac{xe^x}{1+e^x}$ نسمي (Γ) المنحنى البياني لها .

1 / أ . أكتب $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ ثم ادرس تغيرات الدالة f .

ب . برهن أن $f(\alpha)=1+\alpha$ . .

جـ . برهن أن المنحنى (Γ) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) معادلته : $y=x$.

د . اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (Γ) عند النقطة O مبدأ المعلم ، ثم ادرس وضعية المنحنى (Γ) بالنسبة للمماس (T).

هـ . ارسم في معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ المنحن (Γ) و (Δ) (تؤخذ $2cm$ كوحدة).

2 / H نقطة فاصلتها x (حيث $x \succ 0$) وترتيبها معدوم، المستقيم الموازي للمحور (yy') والمار من H يقطع (Γ) في النقطة M ويقطع المقارب (Δ) في النقطة N ، نضع $\varphi(x)=MN$.

أ . بين أن $\varphi(x)=\dfrac{x}{1+e^x}$.

ب . برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $\varphi'(x)=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}\cdot g(-x)$.

واستنتج أن MN يكون أكبر ما يمكن عندما $x=-\alpha$.

جـ . برهن أن $f(-\alpha)=1$.

د. برهن أن المماس للمنحنى (Γ) عند النقطة A ذات الفاصلة $(-\alpha)$ يوازي المستقيم (Δ).اكتب معادلته ثم ارسمه في نفس المعلم السابق.

3 / ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة التالية: $me^x+m+x=0$.

4 / برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x\geq 1$ لدينا : $\dfrac{e^x}{1+e^x}\leq f(x)\leq x$.

التمرين الثاني

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x)=2+(x-2)e^{-x+2}$.

1) ادرس تغيرات الدالة g .

2) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث ، $1.14<\alpha<1.15$.

3) إستنتج إشارة $g(x)$ عندما يتغير x في $\mathbb{R}$.

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=2x-1-(x-1)e^{-x+2}$.

نسمي $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) بيّن أن : من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=g(x)$ ثمّ شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) أ) بيّن أنّ : $f(\alpha)=2\alpha+1+\dfrac{2}{\alpha-2}$ ثمّ إستنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

ب) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=2x-1$ مقارب مائل للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $+\infty$ ثمّ أدرس الوضع النسبي للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى (Δ).

ج) بيّن أن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب كتابة معادلة ديكارتية له.

د) أحسب $f(0)$ و $f(2)$ ثمّ أنشئ (Δ)، (T) و $(\mathcal{C}_f)$.

4) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية :
$(E): 2m-1-(x-1)e^{-x+2}=0$.

التمرين الثالث

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$.

حيث a ؛ b و c أعداد حقيقية و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس

1- عين الأعداد الحقيقية a ؛ b و c بحيث يقبل (C_f) عند النقطة $A(0;-3)$ مماسا معامل توجيهه 3 و العدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $f(x)=0$.

2- نضع $c=-3\,,\ b=0\,,\ a=1$

أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أدرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

3- أكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x=0$ ثم عين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .

4- أرسم (T) و (C_f) .

5- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فإن $f(x)+2f'(x)+f''(x)\ =\ 2\,e^{-x}$

6- m وسيط حقيقي ؛ ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $x^2-3+me^x=0$.

التمرين الرابع

I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x+2-e^x$.

1) أدرس تغيّرات الدالة g على $[0;+\infty[$ ، وَ عيّن نهاية g عند $+\infty$.

2) أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاّ وحيدا α على $[0;+\infty[$.

ب) تحقّق أنّ : $1{,}14<\alpha<1{,}15$.

ج) إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $[0;+\infty[$.

II) نعرّف على المجال $[0;+\infty[$ الدالة f كما يلي : $f(x)=\dfrac{e^x-1}{xe^x+1}$ ، و ليكن (C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $[0;+\infty[$: $f(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$.

ب) إستنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل ، x من $[0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{e^x\times g(x)}{(xe^x+1)^2}$.

ب) إستنتج إتجاه تغيّر الدالة f على $[0;+\infty[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها .

ج) بيّن أنّ : $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+1}$ ، ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

3) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

4) أ) تحقّق أنّه من أجل كل x من $[0;+\infty[$: $f(x)-x=\dfrac{(x+1)\times u(x)}{xe^x+1}$ ، حيث :

$u(x)=e^x-xe^x-1$.

ب) أدرس إتجاه تغيّر الدالّ u على $[0;+\infty[$ ، ثمّ إستنتج إشارة $u(x)$.

ج) إستنتج من الأسئلة السابقة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى (T) .

د) أنشئ كلاّ من (T) و المنحنى (C_f) ،

التمرين الخامس

1) g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2e^x$

أ*/ أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$.

ب*/ استنتج أنه : إذا كان $0\prec x\prec 1$ فإن $g(x)\prec g\left(\dfrac{1}{x}\right)$ و إذا كان $x\succ 1$ فإن $g(x)\succ g\left(\dfrac{1}{x}\right)$

2) نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي :

$$f(x)=\left(x^2-2x+2\right)e^x+e^{\frac{1}{x}}-3e$$

(C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

h دالة عددية معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=e^{\frac{1}{x}}-3e$. (C_h) تمثيلها البياني **(أنظر في الأسفل)**

أ*/ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}}f(x)$.

ب*/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=g(x)-g\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ، ثم احسب $f'(1)$.

ج*/ شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

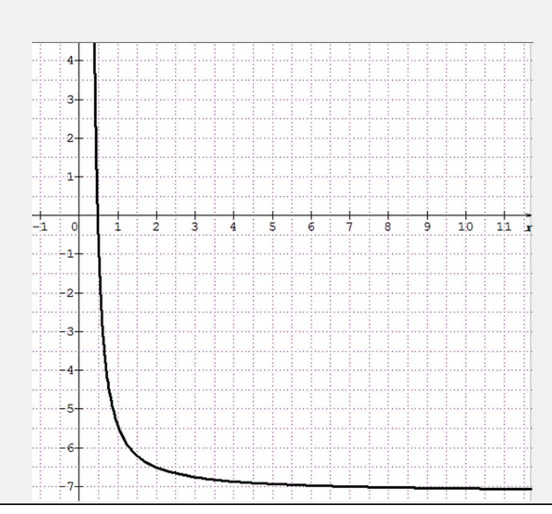
3) أ*/ بين أن المعادلة: $\left(x^2-2x+2\right)e^x=-h(x)$ تقبل حلين α و β حيث: $1.5\prec\beta\prec 1.6$

و $0.5\prec\alpha\prec 0.6$ ، ثم استنتج أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين .

ب*/ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (C_h).

ج*/ بين ان المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة التي فاصلتها 1 يطلب كتابة معادلته .

4) أ*/ أرسم (T) و (C_f) .



التمرين السادس

1. لتكن الدالة العددية g المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=(1-x)e^{x}-1$.

أ- أدرس تغيرات الدالة g و استنتج اشارة $g(x)$ على المجال $[0;+\infty[$.

ب- بين ان الدالة k حيث: $k(x)=(2-x)e^{x}-x$ دالة أصلية للدالة g على المجال $[0;+\infty[$.

ج- استنتج حساب $\int_0^1 g(x)dx$.

2. f الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي :

$f(0)=1$ و من أجل كل يختلف عن الصفر: $f(x)=\dfrac{x}{e^{x}-1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب الى معلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. أ- أثبت أن $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x}=1$.

ب- عين نهاية الدالة f عند 0، ثم استنتج أن f مستمرة عند الصفر من اليمين .

ج- عين نهاية الدالة f عند $+\infty$. فسر النتيجة هندسيا.

3. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^{x}-1)^2}$.

ب- استنتج تغيرات الدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

ج- أرسم المنحنى (C_f).

4. لتكن المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ب: $u_n=\dfrac{1}{n}\left[1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\ldots+e^{\frac{n-1}{n}}\right]$.

أ- برهن أن: $1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\ldots+e^{\frac{n-1}{n}}=\dfrac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$ ثم استنتج أن: $u_n=(e-1)f\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

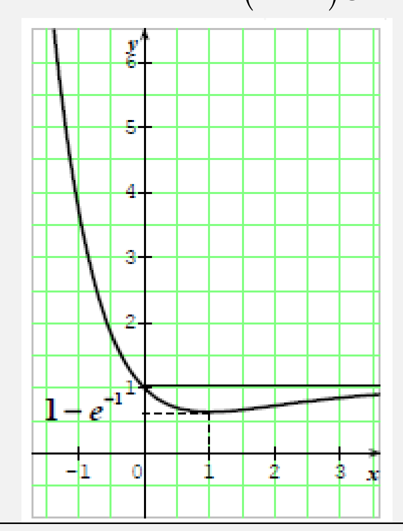
ب-استنتج باستعمال الجزء الأول من التمرين أيضا، أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو $e-1$

التمرين السابع

I. f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=a+bxe^{-x}$.

الشكل المقابل هو التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

بقراءة بيانية عين العددين الحقيقيين a و b.



II. نعتبر g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=1-xe^{-x}$.

1.احسب نهايات الدالة g عند حدود مجموعة تعريفها.

2.أدرس اتجاه تغير الدالة g .

3.شكل جدول تغيرات الدالة g .

4.أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_g) عند النقطة التي ترتيبها 1.

5.بين أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعين احداثياتها.

I. نذكر أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x}=+\infty$ ، أثبت أن $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}=0$

II. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=(x+1)e^{-x}$.

(C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.أ-احسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

التمرين الثامن

ب-أدرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

2.أرسم (C).

III. k عدد صحيح، نسمي f_k الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f_k(x)=(x+1)e^{kx}$.

و (C_k) تمثيلها البياني في المعلم السابق $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.أ-ماطبيعة الدالة f_0 .

ب-عين نقط تقاطع المنحنين (C_0) و (C_1).تحقق أن هذه النقطة تنتمي الى (C_k).

2.أدرس، حسب قيم x اشارة العبارة: $(x+1)(e^x-1)$ استنتج، من أجل عدد k معطى، الوضعية النسبية للمنحنين (C_k) و (C_{k+1}).

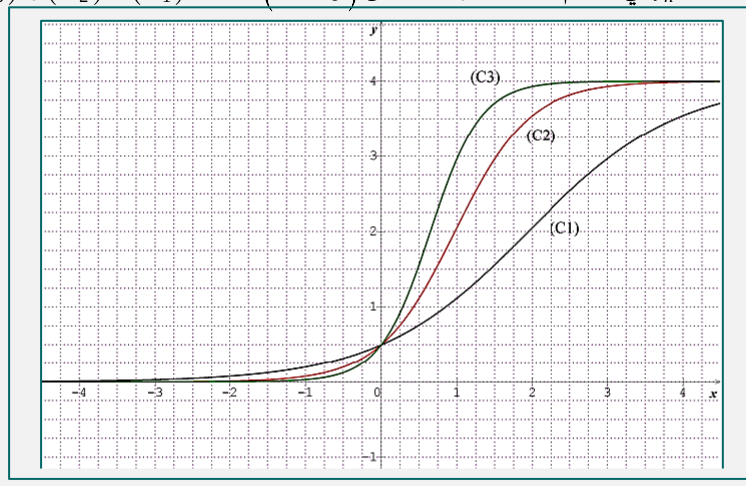
3.احسب $f_k'(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد صحيح k غير معدوم.

استنتج حسب قيم k اتجاه تغير الدالة f_k (ميز الحالتين $k>0$ و $k<0$)

4.أرسم (C_1) في نفس المعلم السابق.

التمرين التاسع

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، نعرف الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f_n(x)=\dfrac{4e^{nx}}{e^{nx}+7}$ نرمز للمنحنى (C_n) الممثل للدالة f_n في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ اليك، (C_1)، (C_2) و (C_3):



الجزء الأول: لتكن الدالة f_1 المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f_1(x)=\dfrac{4e^x}{e^x+7}$

1.تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f_1(x)=\dfrac{4}{1+7e^{-x}}$

2.أ-بين أن للمنحنى (C_1) مستقيمين مقاربين يطلب ايجاد معادلتيهما

ب-بين أن الدالة f_1 متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

ج-أثبت أنه من أجل كل x عدد حقيقي، $0<f_1(x)<4$.

3.أ-بين أن النقطة $I_1(\ln 7;2)$ مركز تناظر للمنحنى (C_1).

ب-أوجد معادلة المماس (T_1) للمنحنى (C_1) عند النقطة I_1 .

ج-أرسم المماس (T_1).

4.أ-عين دالة أصلية للدالة f_1 على $\mathbb{R}$.

ب-احسب القيمة المتوسطة للدالة على $\mathbb{R}$ على المجال $[0;\ln 7]$.

الجزء الثاني: 1.أثبت أنه من لأجل كل عدد طبيعي n غير معدوم النقطة $A\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ تنتمي للمنحنى (C_n) .

2.أ-بين أنه مهما تغيرت قيمة n من $\mathbb{N}^*$ فان المستقيم ذا المعادلة $y=2$ يقطع (C_n) في نقطة وحيدة I_n يطلب تعيين فاصلتها .

ب-حدد معادلة المماس (T_n) للمنحنى (C_n) عند النقطة I_n .

ج-أرسم (T_2) و (T_3).

التمرين العاشر

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)$ و (C) المنحنى الممثل للدالة في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة $2cm$)

1. بين أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ و أن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

2. أ-برهن أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-x+\frac{5}{2}$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

ب- حل المعادلة $e^{x-2}-4=0$ ثم بين أن المنحنى (C) يوجد فوق (Δ) على المجال $]-\infty;2+\ln 4]$ و تحت (Δ) على المجال $[2+\ln 4;+\infty[$.

3. بين أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$.

4. أ-بين أن لكل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=-\left(e^{x-2}-1\right)^2$.

ب-شكل جدول تغيرات الدالة f

5. أحسب من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f''(x)$ ثم بين أن $A(2;2)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C).

6. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث، $2+\ln 3<\alpha<2+\ln 4$.

7. أنشئ (Δ) و (C) في نفس المعلم (نأخذ القيمتين المقربتين التاليتين $\ln 2\simeq 0,7$ ، $\ln 3\simeq 1,1$).

التمرين الحادي عشر

الجزء الأول: لتكن الدالة φ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $\varphi(x)=(x^2+x+1)e^{-x}-1$.

1. أ-عين نهايتي الدالة φ عند $-\infty$ و $+\infty$.

ب-أدرس اتجاه تغير الدالة φ ثم شكل جدول تغيراتها على $\mathbb{R}$.

2. بين أن المعادلة $\varphi(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث $\alpha\in[1;+\infty[$ يطلب تعين حصر له سعته 10^{-2}.

3. استنتج حسب قيم x اشارة $\varphi(x)$.

الجزء الثاني: التمثيلين البيانين المقابلين (C_f) و (C_g) هما للدالتين f و g على الترتيب المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=(2x+1)e^{-x} \quad \text{و} \quad g(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

1. بين أن المنحنين (C_f) و (C_g) يمران بالنقطة $A(0;1)$ و لهما نفس معادلة المماس عند النقطة A

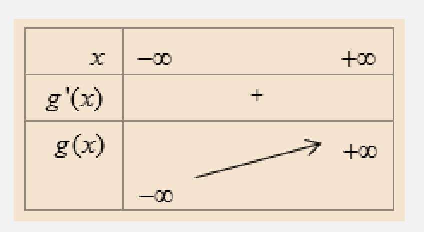
2. أ-بين ان من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x)-g(x)=\frac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$

ب-حسب قيم x عين اشارة $f(x)-g(x)$ على $\mathbb{R}$.

ج-استنتج الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g).

I. لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=e^x-x^2+3x-1$.

الجدول المقابل يمثل جدول تغيرات الدالة g.



x	$-\infty$ $+\infty$
$g'(x)$	+
$g(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

1. تحقق من أن $g(0)=0$.

2. حدد اشارة $g(x)$ على كل من المجالين $]-\infty;0]$ و $[0;+\infty[$.

II. لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\left(x^2-x\right)e^{-x}+x$.

التمرين الثاني عشر

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة $1cm$).

1.أ-تحقق من أن $f(x)=\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}+x$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ثم بين أن: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

ب-احسب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]$ ثم استنتج أن المنحنى (C) يقبل مستقيم مقارب (D) بجوار $+\infty$ معادلته $y=x$.

ج-تحقق من أن: $f(x)=\frac{x^2-x+xe^x}{e^x}$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ثم احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

2.أ-تحقق من أن $f(x)-x$ و x^2-x لهما نفس الاشارة من أجل كل x من $\mathbb{R}$.

ب-استنتج أن (C) يوجد فوق (D) على المجالين $]-\infty;0]$ و $[1;+\infty[$ و تحت (D) على المجال $[0;1]$.

3.أ-بين أن لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $f'(x)=g(x)e^{-x}$.

ب-استنتج أن الدالة f متناقصة على $]-\infty;0]$ و متزايدة على المجال $[0;+\infty[$.

ج-شكل جدول تغيرات الدالة f .

4.أ-تحقق من أن $f''(x)=(x^2-5x+4)e^{-x}$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$.

ب-استنتج أن المنحنى (C) يقبل نقطتي انعطاف فواصلهما 1 و 4 على الترتيب.

5.أنشئ (D) و (C) في نفس المعلم (نأخذ $f(4)\simeq 4,2$).

التمرين الثالث عشر

I.لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=e^{-2x-1}+3x-1$. (C_f) و تمثيلها البياني في معلم متعامد ز متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$.

احسب $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(3x-1)\right]$ ، فسر النتيجة هندسيا.

2.أدرس تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدو تغيراتها.

3.بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β بحيث $-1,3<\alpha<-1,2$ و $0,2<\beta<0,3$.

4.أرسم المنحنى (C_f).

II.نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين كما يلي: $u_n=e^{-2n-1}$ و $v_n=3n-1$.

1.بين أن المتتالية (u_n) هندسية و أن المتتالية (v_n) حسابية.

2.أدرس اتجاه تغير المتتاليتين (u_n) و (v_n).

3.المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان ؟ علل اجابتك.

4. احسب المجموع S_n بدلالة n بحيث : $S_n=f(0)+f(1)+...+f(n)$

ب-احسب $\lim_{n\to+\infty} S_n$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n^2}$.

التمرين الرابع عشر

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=xe^{1-x}$.

1.بين أنه من اجل كل x عدد حقيقي، $f(x)=e\times\frac{x}{e^x}$.

2. عين نهاية الدالة عند $-\infty$ و عند $+\infty$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

3. ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

II.من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم و نعتبر الدالتان g_n و h_n المعرفتان على:

$g_n(x)=1+x+x^2+...+x^n$ و $h_n(x)=1+2x+...+nx^{n-1}$

1.بين انه من أجل كل عدد حقيقي x: $(1-x)g_n(x)=1-x^{n+1}$.

2.تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي يختلف عن 1، $h_n(x)=\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$

3.نضع $S_n=f(1)+f(2)+...+f(n)$:

أ-احسب بدلالة n المجموع S_n ب-احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

التمرين الخامس عشر

الجزء الأول :

لتكن الدالة g المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=e^x-x-1$.

1.أدرس اتجاه تغير الدالة g .

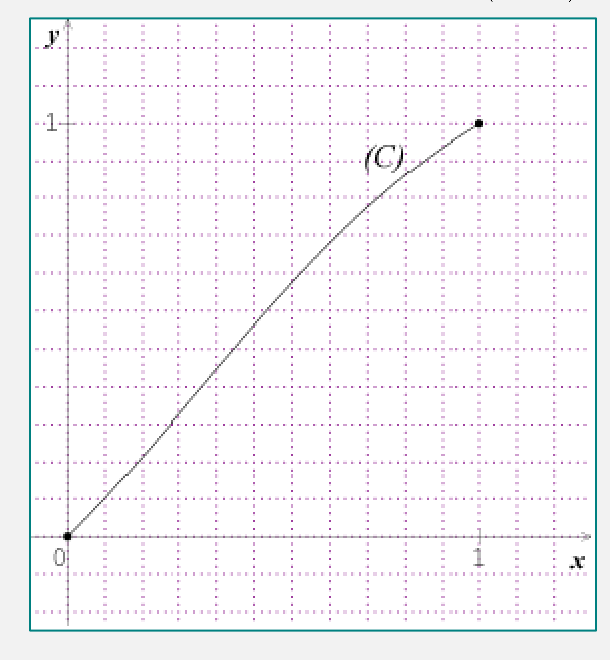
2.عين حسب قيم x اشارة $g(x)$.

3.استنتج أنه من أجل كل x من $[0;+\infty[$ ، $e^x-x>0$.

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;1]$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$

و (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ كما هو موضح في الشكل المقابل :



1.بين أنه من أجل كل x من $[0;1]$ ، $f(x)\in[0;1]$.

2.ليكن (D) المستقيم ذا المعادلة $y=x$.

أ-بين أنه من أجل كل x من $[0;1]$،

$f(x)-x=\dfrac{(1-x)g(x)}{e^x-x}$.

ب- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (D).

3.أ-عين دالة أصلية للدالة f على $[0;1]$.

ب-احسب مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C) و المستقيم (D)

و المستقيمات التي معادلاتها: $x=0$ و $x=1$.

الجزء الثالث: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بالعلاقة:

$\begin{cases} u_0=\dfrac{1}{2} \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$ من أجل كل عدد طبيعي n .

1. باستعمال الشكل السابق مثل الحدود الأربعة الأولى دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل.

2.بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\dfrac{1}{2}<u_n<u_{n+1}<1$.

3.استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم عين نهايتها

الحلول

1.

g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+x+e^x$

/1 * $\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$: $g'(x)=1+e^x \succ 0$

*جدول التغيرات:

x	$-\infty$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

/2نبين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد في $\mathbb{R}$:

* g مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و $\lim_{x\to-\infty} g(x)\times \lim_{x\to+\infty} g(x)\prec 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α في $\mathbb{R}$.

***لدينا:** $g(-1.2)g(-1.3)=(-0.03)(0.10)\prec 0$

ومنه $-1.3\prec\alpha\prec-1.2$.

/3إشارة $g(x)$ **على** $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

* **استنتاج إشارة** $g(-x)$:

$g(-x)=0$ معناه $-x=\alpha$ ومنه $x=-\alpha$.

$g(-x)\prec 0$ معناه $-x\prec\alpha$ ومنه $x\succ-\alpha$.

ومنه:

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$g(-x)$	$+$	0	$-$

II) f معرفة على $\mathbb{R}$: $f(x)=\dfrac{xe^x}{1+e^x}$

أ/1. f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا:

$$f'(x)=\frac{(e^x+xe^x)(1+e^x)-e^x(xe^x)}{(1+e^x)^2}=\frac{e^x\cdot g(x)}{(1+e^x)^2}$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ لأن: $\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}\succ 0$

إذن: الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$

ومتزايدة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$

* $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{1}{1+e^x}\right)=+\infty$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

ب) نبرهن أن $f(\alpha)=1+\alpha$: لدينا $g(\alpha)=0$ معناه: $1+\alpha+e^{\alpha}=0$ أي: $e^{\alpha}=-(1+\alpha)$ نعوض نجد:

$$f(\alpha)=\frac{\alpha e^{\alpha}}{1+e^{\alpha}}=\frac{\alpha(-\alpha-1)}{1-\alpha-1}=1+\alpha$$

ج) نبرهن أن (Γ) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) معادلته $y=x$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-x}{1+e^x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{e^x}\left(\frac{-1}{e^{-x}+1}\right)\right]=0$$

د)كتابة معادلة المماس (T) لـ (Γ) عند مبدأ المعلم: $(T):y=\frac{1}{2}x$

*الوضعية :ندرس إشارة الفرق $f(x)-\frac{1}{2}x=\frac{x(e^x-1)}{2(e^x+1)}$

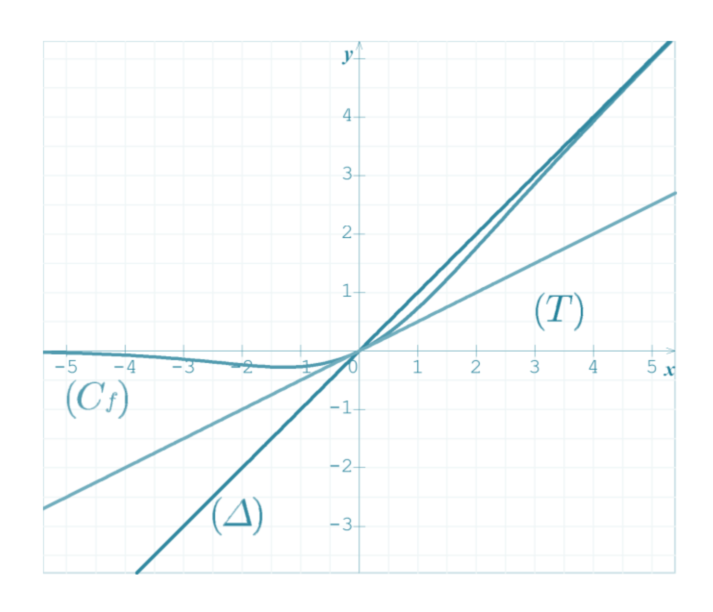
من إشارة الجداء $x(e^x-1)$ نجد :

من أجل $x\prec 0$ المنحنى (Γ) فوق المستقيم (T).

من أجل $x\succ 0$ المنحنى (Γ) فوق المستقيم (T).

من أجل $x=0$ يتقاطعان في النقطة $(0;0)$

هـ . الرسم



2 /أ) $\varphi(x)=MN=|x-f(x)|=\frac{x}{1+e^x}$.

ب) من أجل $x \succ 0$ الدالة φ قابلة للإشتقاق :

$$\varphi'(x)=\frac{(1+e^x)-xe^x}{(1+e^x)^2}=\frac{e^x(e^{-x}+1-x)}{(1+e^x)^2}=\frac{e^x\cdot g(-x)}{(1+e^x)^2}$$

x	$-\infty$ $\quad -\alpha \quad$ $+\infty$	
$\psi'(x)$	$+$	$-$

إشارة $\varphi'(x)$ من إشارة $g(-x)$ ومنه

نستنتج أن $\varphi(x)$ تقبل قيمة حدية عظمى من أجل $x=-\alpha$.
ومنه

MN يكون أكبر ما يمكن حيث $MN=\varphi(-\alpha)=\frac{-\alpha}{1+e^{-\alpha}}$.

ج) نبرهن أن $f(-\alpha)=1$:

$$f(-\alpha)=\frac{-\alpha e^{-\alpha}}{1+e^{-\alpha}}=\frac{-\alpha}{e^{\alpha}+1}=\frac{-\alpha}{-1-\alpha+1}=1$$

د)نبرهن أن المماس للمنحنى (Γ)عند Aذات الفاصلة $(-\alpha)$ يوازي (Δ) : $f'(-\alpha)=\frac{e^{-\alpha}\cdot g(-\alpha)}{(1+e^{-\alpha})^2}=\frac{e^{-\alpha}(1-\alpha+e^{-\alpha})}{e^{-2\alpha}+2e^{-\alpha}+1}$

ولدينا : $e^{\alpha}=-1-\alpha$ نعوض نجد:

$$f'(-\alpha)=\frac{e^{-2\alpha}(e^{\alpha}-\alpha e^{\alpha}+1)}{e^{-2\alpha}(1+2e^{\alpha}+e^{2\alpha})}=\frac{-1-\alpha-\alpha(-1-\alpha)+1}{1+2(-1-\alpha)+(-1-\alpha)^2}=\frac{\alpha^2}{\alpha^2}=1$$

معادلته: $(\Delta'): y=x+\alpha+1$

3/مناقشة عدد وإشارة حلول المعادلة حسب قيم الوسيط m:

$me^x+m+x=0$ يكافئ $m=\frac{-x}{(e^x+1)}$

أي أن $m+x=\frac{-x}{1+e^x}+x$ **معناه** $f(x)=x+m$

حلول هذه المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة : $y=x+m$ الموازي لـ (Δ') و (Δ):

* $m\in]-\infty;\alpha+1[$: المعادلة لا تقبل حلول
* $m=\alpha+1$: المعادلة تقبل حل مضاعف موجب
* $m\in]\alpha+1;0[$: المعادلة تقبل حلين متمايزين موجبين تماما .
* $m=0$: المعادلة تقبل حل وحيد معدوم
* $m\in]0;+\infty[$ المعادلة تقبل حل وحيد سالب تماما.

4 /أ.البرهان أنه من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x\geq 1$ لدينا $\frac{e^x}{1+e^x}\leq f(x)\leq x$: ندرس إشارة الفرق نجد:

$f(x)-x=\frac{xe^x}{1+e^x}-x=\frac{-x}{1+e^x}\leq 0$ معناه: $f(x)\leq x$ ... (1)

من جهة أخرى ندرس إشارة الفرق: $f(x)-\frac{e^x}{1+e^x}=\frac{xe^x-e^x}{1+e^x}=\frac{e^x(x-1)}{1+e^x}\geq 0$

معناه:من أجل $x\geq 1$: $f(x)\geq\frac{e^x}{1+e^x}$ ... (2)

من (1) و (2) نجد:من أجل $x\geq 1$ $\frac{e^x}{1+e^x}\leq f(x)\leq x$.

.2

I. لدينا $g(x)=2+(x-2)e^{-x+2}$ المعرفة على $\mathbb{R}$

1) دراسة تغيرات الدالة g:

- حساب النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(2+(x-2)e^{-x+2}\right)=-\infty \quad \text{لأنّ} \quad \begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(x-2)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x+2}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(x-2)e^{-x+2}=-\infty\end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2+(x-2)e^{-x+2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{x-2}{e^{x-2}}\right)=2 \quad \text{لأنّ} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{e^{x-2}}=0$$

حساب المشتقة :

$g'(x)=e^{-x+2}+(x-2)\left(-e^{-x+2}\right)=(1-x+2)e^{-x+2}=(3-x)e^{-x+2}$ أي $g'(x)=(3-x)e^{-x+2}$

دراسة إشارة المشتقة :

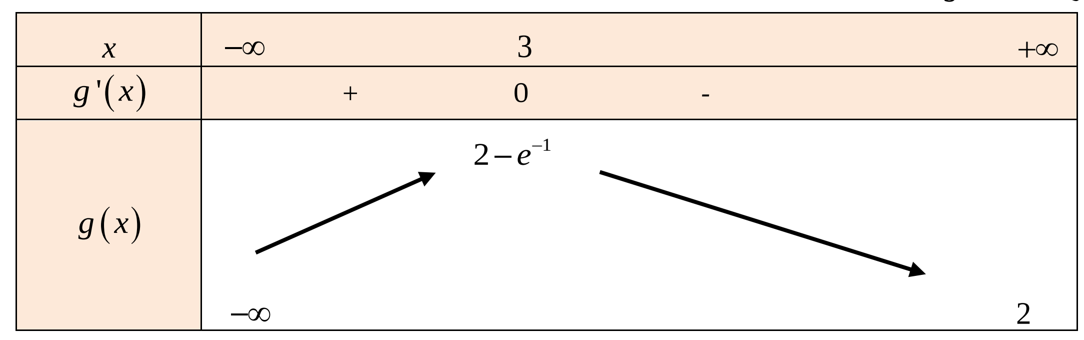
$g'(x)=0$ يعني $(3-x)e^{-x+2}=0$ ومنه $3-x=0$ لأن $e^{-x+2}\neq 0$

أي $x=3$

جدول إشارة المشتقة : إشارة المشتقة من إشارة $3-x$ لأنّ $e^{-x+2}>0$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$3-x$		+	0	-	
$g'(x)$		+	0	-	

جدول تغيرات الدالة g :



x	$-\infty$		3		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$2-e^{-1}$	↘	2

2) تبيان أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث ، $1.14<\alpha<1.15$:

الدالة g مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[1.14;1.15]$

ولدينا : $\begin{cases} g(1.14)=2+(1.14-2)e^{-1.14+2}=-0.03\\ g(1.15)=2+(1.15-2)e^{-1.15+2}=0.01\end{cases}$ أي $g(1.14)\times g(1.15)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث ،. $1.14<\alpha<1.15$

3) إستنتاج إشارة $g(x)$ عندما يتغير x في $\mathbb{R}$:

$x\in$	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	

$g(x)<0$ إذا كان $x\in]-\infty;\alpha[$

$g(x)=0$ إذا كان $x=\alpha$.

$g(x)>0$ إذا كان $x\in]\alpha;+\infty[$.

II. لدينا الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=2x-1-(x-1)e^{-x+2}$

1) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[2x-1-(x-1)e^{-x+2}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[2x\left(1-\frac{1}{2x}-\left(\frac{x-1}{2x}\right)e^{-x+2}\right)\right]=+\infty$

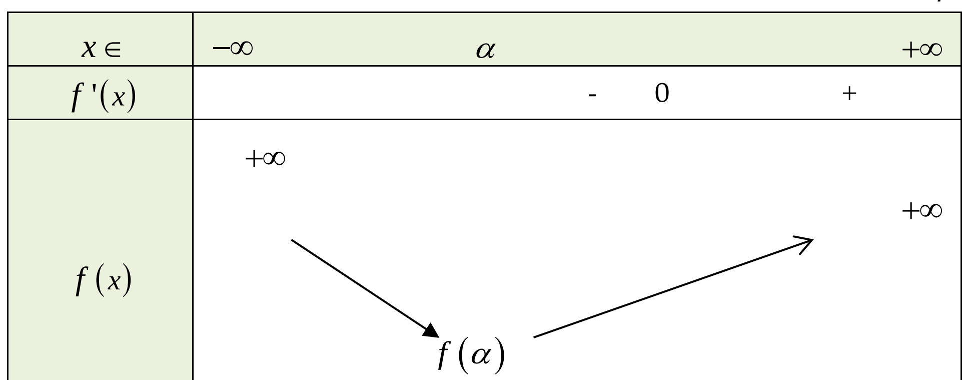
و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2x-1-(x-1)e^{-x+2}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2x-1-\frac{x-1}{x-2}\times\frac{x-2}{e^{x-2}}\right]=+\infty$

لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)e^{-x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{x-1}{x-2}}_{=1}\times\underbrace{\frac{x-2}{e^{x-2}}}_{=0}=0$

2) تبيان أنّ : من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=g(x)$:

لدينا : $f'(x)=2-\left[e^{-x+2}-(x-1)e^{-x+2}\right]=2-(2-x)e^{-x+2}=2+(x-2)e^{-x+2}=g(x)$

جدول تغيرات الدالة f :



$x\in$	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

3) أ) تبيان أنّ : $f(\alpha)=2\alpha+1+\frac{2}{\alpha-2}$ ثمّ إستنتاج حصرا لـ $f(\alpha)$:

لدينا : $f(\alpha)=2\alpha-1-(\alpha-1)e^{-\alpha+2}$

لدينا : $g(\alpha)=0$ و منه $2+(\alpha-2)e^{-\alpha+2}=0$ أي $e^{-\alpha+2}=-\frac{2}{\alpha-2}$

إذن : $f(\alpha)=2\alpha-1-(\alpha-1)\left(\frac{-2}{\alpha-2}\right)=2\alpha-1+\frac{2\alpha-2}{\alpha-2}=2\alpha-1+2+\frac{2}{\alpha-2}$

إذن $f(\alpha)=2\alpha+1+\frac{2}{\alpha-2}$

حصر $f(\alpha)$:

لدينا : $1.14<\alpha<1.15$ ومنه

$1.14-2<\alpha-2<1.15-2$

$-0.86<\alpha-2<-0.85$

$\frac{2}{-0.85}<\frac{2}{\alpha-2}<\frac{2}{-0.86}$

$-2.35<\frac{2}{\alpha-2}<-2.32$

و

$2\times1.14+1<2\alpha+1<2\times1.15+1$

$3.28<2\alpha+1<3.30$

وبالتالي $3.30-2.32 > 2\alpha+1+\frac{2}{\alpha-2} > 3.28-2.35$ أي $0.93<f(\alpha)<0.98$

ب) تبيان أنّ المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=2x-1$ مقارب مائل للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $+\infty$:

لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\left[2x-1-(x-1)e^{-x+2}-(2x-1)\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x-1)\right]$

ومنه $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x-1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[-(x-1)e^{-x+2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{x-1}{x-2}\times\frac{x-2}{e^{x-2}}\right]=0$

أي المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=2x-1$ مقارب مائل للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $+\infty$

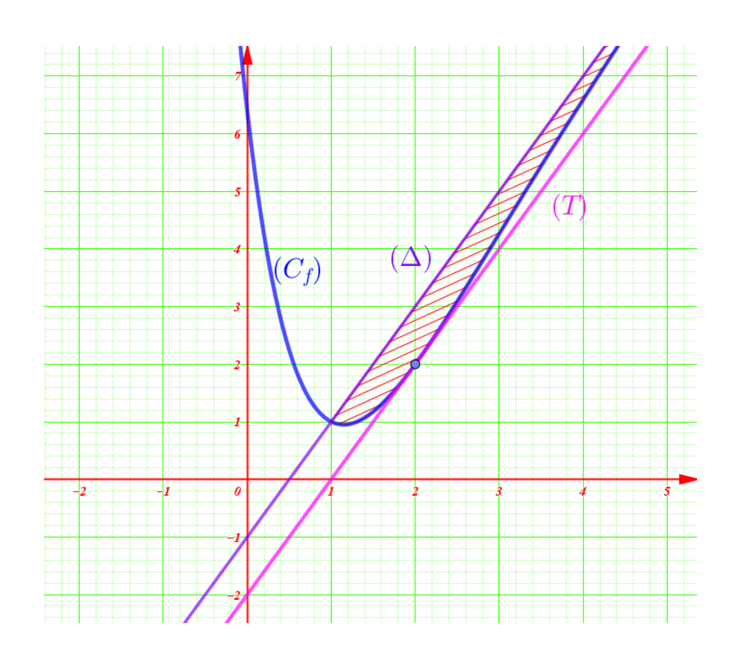
دراسة الوضعية النسبية للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى (Δ) :

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y=-(x-1)e^{-x+2}$

$x\in$	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	-	0	+
$f(x)-y$	+	0	-
الوضع النسبي	$(\mathcal{C}_f)$ فوق (Δ)	$(\mathcal{C}_f)$ يقطع (Δ)	$(\mathcal{C}_f)$ تحت (Δ)

د) حساب $f(0)$ و $f(2)$ ثمّ أنشاء (Δ)، (T) و $(\mathcal{C}_f)$:

$$f(0)=2\times0-1-(0-1)e^{2-0}=-1+e^2\simeq6.39$$
$$f(2)=2\times2-1+(2-1)e^{2-2}=2$$



4) مناقشة حلول المعادلة : $(E): 2m-1-(x-1)e^{-x+2}=0$

(E) تكافئ $-1-(x-1)e^{-x+2}=-2m$

تكافئ $2x-1-(x-1)e^{-x+2}=2x-2m$

ومنه $f(x)=2x-2m$

حلول المعادلة هي فواصل النقط المشتركة بين $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيم ذي المعادلة $y=2x-2m$ الموازي لكل من (Δ) و (T).

- إذا كان $-2m \in]-\infty;-2[$ أي $m \in]1;+\infty[$ فإنّ المعادلة ليس لها حل .
- إذا كان $-2m=-2$ أي $m=1$ فإنّ المعادلة لها حل وحيد موجب.
- إذا كان $-2m \in]-2;-1[$ أي $m \in \left]\frac{1}{2};1\right[$ فإنّ المعادلة تقبل حلين موجبين .
- إذا كان $-2m \in]-1;-1+e^2[$ أي $m \in \left]\frac{1}{2};\frac{1}{2}-\frac{e^2}{2}\right[$ فإنّ المعادلة لها حل موجب .

إذا كان $-2m=-1+e^2$ أي $m=\frac{1}{2}-\frac{e^2}{2}$ فإنّ المعادلة لها حل معدوم .

- إذا كان $-2m \in]-1+e^2;+\infty[$ أي $m \in \left]-\infty;\frac{1}{2}-\frac{e^2}{2}\right[$ فإنّ المعادلة لها حل وحيد سالب .

.3

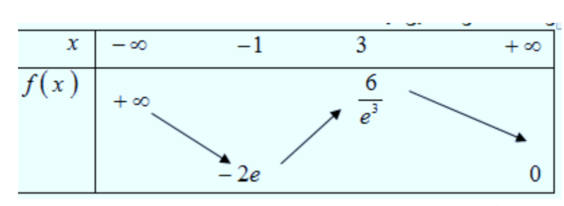
-1 تعيين الأعداد الحقيقية a ؛ b و c : $b=0$ و $a=1$ و $a=-3$

-2 ..... $f(x)=(x^2-3)e^{-x}$

حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

دراسة اتجاه تغير الدالة f : المشتقة : $f'(x)=(-x^2+2x+3)e^{-x}$ إشارتها من إشارة $(-x^2+2x+3)$ تنعدم عند العددين 3 و -1 و منه f متناقصة على المجالين $]-\infty;-1]$ و $[3;+\infty[$ متزايدة على المجال $[-1;3]$

و شكل جدول تغيراتها :



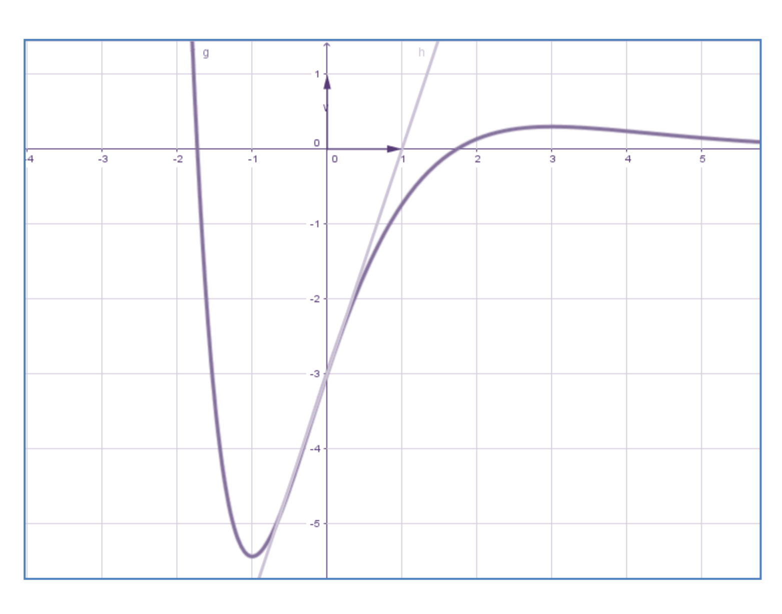
x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-2e$ ↗	$\frac{6}{e^3}$ ↘	0

-3 كتابة معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x=0$ معادلة المماس هي $y=3x-3$

تعيين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل

$f(x)=0$ يكافئ $x^2-3=0$.اي ان $x=\sqrt{3}$ او $x=-\sqrt{3}$ نقطتي التقاطع هما $B(\sqrt{3};0)$ و $C(-\sqrt{3};0)$

-4 رسم (T) و (C_f)



-5 تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فإن

$$f(x)+2f'(x)+f''(x) = 2e^{-x}$$

$f(x)=(x^2-3)e^{-x}$ و $f'(x)=(-x^2+2x+3)e^{-x}$

$f''(x)=(-2x+2)e^{-x}+(x^2-2x-3)e^{-x}$ أي ان $f''(x)=(x^2-4x-1)e^{-x}$

و منه $f(x)+2f'(x)+f''(x)=(x^2-3-2x^2+4x+6+x^2-4x-1)e^{-x}=2e^{-x}$

-6 m وسيط حقيقي ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $x^2-3+me^x=0$

المعادلة تكافئ $me^x=-(x^2-3)$ أي ان $-m=(x^2-3)e^{-x}$ يكافئ $-m=f(x)$

حلها هو إيجاد فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y=-m$

المناقشة

لما $-m<-2e$ أي ان $m>2e$ نلاحظ ان (Δ_m) و (C_f) لا يتقاطعان و منه ليس للمعادلة حلول .

لما $-m=-2e$ أي ان $m=2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب.

لما $-3>-m>-2e$ أي ان $3<m<2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلاتهما سالبان ومنه للمعادلة حلين سالبين

لما $-m=-3$ أي ان $m=3$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين إحداهما فاصلتها معدومة و الأخرى فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين إحداهما معدوم و الأخر سالب .

لما $0\geq -m>-3$ أي ان $0\leq m<3$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلاتهما مختلفان في الاشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفان في الاشارة .

لما $\frac{6}{e^3}>-m>0$ أي ان $-\frac{6}{e^3}<m<0$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في ثلاثة نقاط نقطتان فاصلاتهما موجبتان و نقطة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين موجبان و حل سالب .

لما $-m=\frac{6}{e^3}$ أي أن $m=-\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتhان فاصلاتهما مختلفان في الاشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفان في الاشارة

لما $-m>\frac{6}{e^3}$ أي ان $m<-\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب .

4.

1) دراسة إتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على $[0;+\infty[$ و دالتها المشتقة هي: $g'(x)=1-e^{x}$.

جدول التغيرات الدالة g :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	1 ↘	$-\infty$

نلاحظ أنه من أجل كل $x\in[0;+\infty[$: $g'(x)\leq 0$.

الخلاصة: الدالة g متناقصة على $[0;+\infty[$.

- حساب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+2-e^{x}\right)=\lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{2}{x}-\frac{e^{x}}{x}\right)=-\infty$$

3) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $[0;+\infty[$:

الدالة g مستمرة و رتيبة تماما على $]0;+\infty[$ و لدينا، $\lim_{x\to+\infty} g(x)\times\lim_{x\to 0} g(x)<0$ و بتالي حسب نظرية القيم المتوسطة فإنه يوجد عدد حقيقي α من $]0;+\infty[$ حيث $g(\alpha)=0$.

ب) التحقّق أنّ : $1{,}14<\alpha<1{,}15$: بما أنّ : $\begin{cases} g(1{,}14)=0{,}01 \\ g(1{,}15)=-0{,}008\end{cases}$ أي $g(1{,}14)\times g(1{,}15)<0$ ، فإن : $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α على $]1{,}14;1{,}15[$ ، إذن : $1{,}14<\alpha<1{,}15$.

4) إشارة $g(x)$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	$+$		$-$

لدينا : $f(x)=\dfrac{e^{x}-1}{xe^{x}+1}$

1) أ) بيان أنه من أجل كل $x\in[0;+\infty[$: $f(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$

لدينا: $f(x)=\dfrac{e^{x}-1}{xe^{x}+1}=\dfrac{\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}}}{\dfrac{xe^{x}+1}{e^{x}}}=\dfrac{1-\dfrac{1}{e^{x}}}{x+\dfrac{1}{e^{x}}}=\dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$ ، إذن : $f(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$ ، و هو المطلوب .

ب) إستنتاج نهاية f عند $+\infty$:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}\right)$ ، نضع $\begin{cases}-x=t\\ x\to+\infty\\ t\to-\infty\end{cases}$ ، أي : $\lim_{t\to-\infty}\left(\dfrac{1-e^{t}}{-t+e^{t}}\right)=0$ ، لأنّ : $\begin{cases}\lim_{t\to-\infty} e^{t}=0\\ \lim_{t\to-\infty}\dfrac{1}{-t}=0\end{cases}$.

2) أ) بيان أنّه من أجل كل $x\in[0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{e^{x}\times g(x)}{\left(xe^{x}+1\right)^{2}}$:

الدالة f قابلة للإستقاق على $[0;+\infty[$ و دالتها المشتقة هي :

$$f'(x)=\frac{e^{x}\left(xe^{x}+1\right)-\left(e^{x}+xe^{x}\right)\left(e^{x}-1\right)}{\left(xe^{x}+1\right)^{2}}=\frac{xe^{2x}+e^{x}-e^{2x}+e^{x}-xe^{2x}+xe^{x}}{\left(xe^{x}+1\right)^{2}}=\frac{xe^{x}+2e^{x}-e^{2x}}{\left(xe^{x}+1\right)^{2}}$$

أي : $f'(x)=\dfrac{e^x\times\left(x+2-e^x\right)}{\left(xe^x+1\right)^2}$ ، و منه : $f'(x)=\dfrac{e^x\times g(x)}{\left(xe^x+1\right)^2}$ ، و هو المطلوب .

ب) إستنتاج إتجاه تغيّر الدالة f ، و تشكيل جدول تغيّراتها :

نلاحظ أنّ إشـارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

- الدالة f متزايدة تماما على $[0;\alpha[$

- الدالة f متناقصة تماما على $]\alpha;+\infty[$

x	0 α $+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$-$

جدول التغيرات

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	0 ↗	$f(\alpha)$	↘ 0

ج) بيان أنّ : $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+1}$ ، واستنتاج حصر لـ $f(\alpha)$:

لدينا : $f(\alpha)=\dfrac{e^\alpha-1}{\alpha e^\alpha+1}$ ، و لدينا أيضا : $g(\alpha)=0$ ، أي : $\alpha+2-e^\alpha=0$ ، أي: $e^\alpha=\alpha+2$ ، الآن نعوض قيمة e^α في $f(\alpha)$:

$f(\alpha)=\dfrac{\alpha+2-1}{\alpha(\alpha+2)+1}=\dfrac{\alpha+1}{\alpha^2+2\alpha+1}=\dfrac{\alpha+1}{(\alpha+1)^2}=\dfrac{1}{\alpha+1}$ ، و منه : $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+1}$ وهو المطلوب .

- إستنتاج حصرا لـ $f(\alpha)$: لدينا $1,14<\alpha<1,15$ ، أي : $2,14<\alpha+1<2,15$ ، أي : $\dfrac{1}{2,15}<\dfrac{1}{\alpha+1}<\dfrac{1}{2,14}$

و منه : $0,465<f(\alpha)<0,467$.

3) كتابة معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

$(T):y=f'(0)(x-0)+f(0)$ ، أي : $(T):y=x$ لأنّ : $\begin{cases}f'(0)=1\\ f(0)=0\end{cases}$.

4) أ) التحقق أنّه من أجل كل $x\in[0;+\infty[$: $f(x)-x=\dfrac{(x+1)\times u(x)}{xe^x+1}$

لدينا : $u(x)=e^x-xe^x-1$. $\dfrac{(x+1)\left(e^x-xe^x-1\right)}{xe^x+1}=\dfrac{e^x-1-x\left(xe^x+1\right)}{xe^x+1}=\dfrac{e^x-1}{xe^x+1}-x=f(x)-x$ ،

و منه : $f(x)-x=\dfrac{(x+1)\times u(x)}{xe^x+1}$ ،

ب) دراسة إتجاه تغير الدالة u ، واستنتاج إشارة $u(x)$:

الدالة u قابلة للإشتقاق على $[0;+\infty[$: $u'(x)=e^x-\left(e^x+xe^x\right)=-xe^x$ ، و منه : $u'(x)\leq 0$.

إذن u متناقصة تماما على $[0;+\infty[$ ، و لدينا أيضا : $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} u(x) = -\infty \\ u(0)=0 \end{cases}$ ، من هذا و ذاك نستنتج أن : $u(x)\leq 0$ من أجل كل $x\in[0;+\infty[$.

ج) إستنتاج الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة لـ (T):

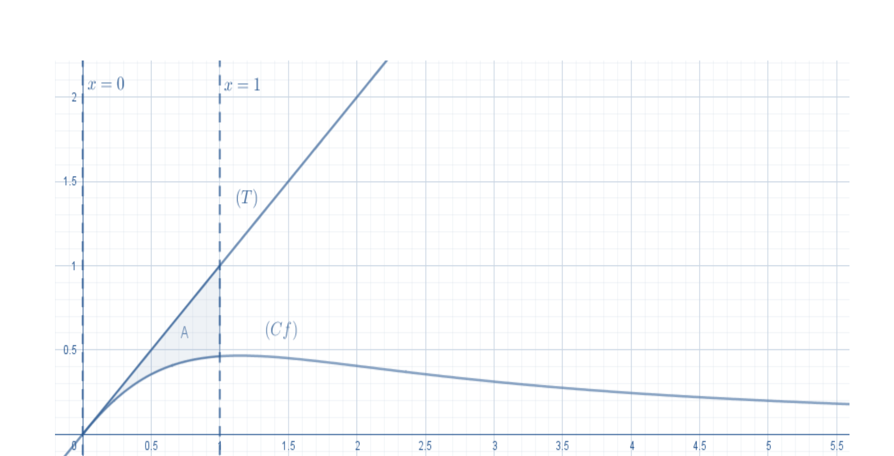
لاستنتاج وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى (T) يكفي دراسة إشارة : $\frac{(x+1)\times u(x)}{xe^x+1}$.

لدينا من أجل كل $x\in[0;+\infty[$: $xe^x+1\geq 0$ ، إذن الإشارة من إشارة $(x+1)\times u(x)$.

إذن نلخص الوضعية في الجدول المقابل .

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$(x+1)$	$+$
$u(x)$	$-$
$(x+1)u(x)$	$-$
الوضعية	(T) يمس (C_f) ؛ (C_f) يقع تحت (T)

د) رسم كلا من (T) و المنحني (C_f) :



5.

1) g معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2e^x$

أ*/ دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$:الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$: $g'(x)=(x^2+2x)e^x$

بما ان $g'(x)\succ 0$ فإن الدالة g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

ب*/ استنتاج أنه : إذا كان $0\prec x\prec 1$ فإن $g(x)\prec g\left(\frac{1}{x}\right)$

و إذا كان $x\succ 1$ فإن $g(x)\succ g\left(\frac{1}{x}\right)$

إذا كان $0 \prec x \prec 1$ فإن $\frac{1}{x} \succ x$ و لدينا g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ ، فإن $g(x) \prec g\left(\frac{1}{x}\right)$

إذا كان $x \succ 1$ فإن $\frac{1}{x} \prec x$ ولدينا g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ ، فإن $g(x) \succ g\left(\frac{1}{x}\right)$

2) f معرفة على $]0;+\infty[$: $f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x + e^{\frac{1}{x}} - 3e$

أ*/ حساب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \succ 0} f(x)$:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \succ 0} f(x) = +\infty$

ب*/ نبين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x) = g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right)$ ، ثم حساب $f'(1)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ دالتها المشتقة f' :

$f'(x) = x^2 e^x - \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right)$ ومنه: $f'(1) = g(1) - g\left(\frac{1}{1}\right) = 0$

ج*/ تشكيل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0;+\infty[$:

إشارة $f'(x)$:

x	0 1 $+\infty$
$f'(x)$	− 0 +

f متزايدة تماما على $[1;+\infty[$

f متناقصة تماما على $]0;1]$

و بالتالي جدول التغيرات هو كالأتي:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-e = -2.71$	↗	$+\infty$

3) أ*/نبين أن المعادلة: $(x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$ تقبل حلين α و β حيث: $1.5 \prec \beta \prec 1.6$ و $0.5 \prec \alpha \prec 0.6$

$(x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$ تكافئ $(x^2 - 2x + 2)e^x + h(x) = 0$

تكافئ $f(x) = 0$ ، لدينا: $f(0.5) \approx 1.25$ ، $f(0.6) \approx -0.74$ بما ان الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على $[0.5;0.6]$

$f(0.6) \times f(0.5) \prec 0$ فان حسب مبرهنة القيم المتوسطة

فإن المعادلة $\left(x^2-2x+2\right)e^x=-h(x)$ تقبل حل وحيد α حيث: $0.5 \prec \alpha \prec 0.6$ ، $f(\alpha)=0$

لدينا: $f(1.5)\approx -0.60$ ، $f(1.6)\approx 0.44$ بما ان الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $[1.5;1.6]$

$0 \prec f(1.5)\times f(1.6)$ فان حسب مبرهنة القيم المتوسطة

فإن المعادلة $\left(x^2-2x+2\right)e^x=-h(x)$ تقبل حل وحيد β حيث: $1.5 \prec \beta \prec 1.6$ ، $f(\beta)=0$

*/استنتاج أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين:

بما ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β فإن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما α و β

ب*/ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (C_h):

ندرس إشارة الفرق $f(x)-h(x)=\left(x^2-2x+2\right)e^x$

$x^2-2x+2 \succ 0$ من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ لأن $\Delta=-4$

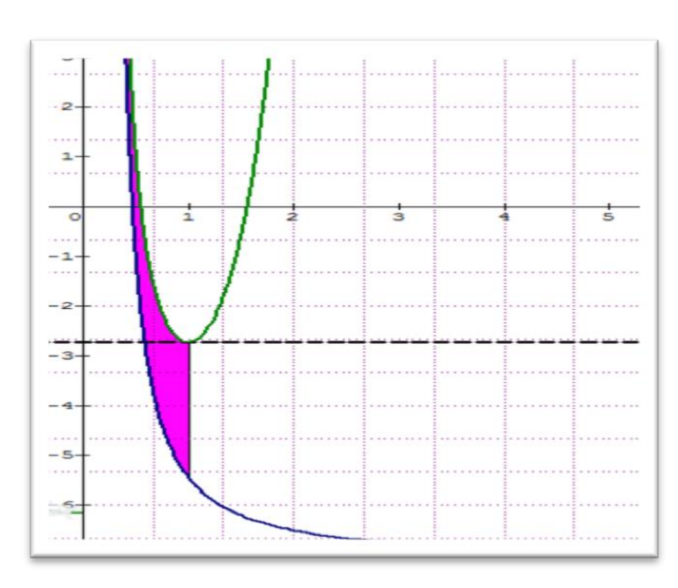
ومنه : (C_f) يقع فوق (C_h) على المجال $]0;+\infty[$

ج*/ نبين ان المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة التي فاصلتها $\mathbf{1}$ يطلب كتابة معادلته :

بماان الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ فإن تمثيلها (C_f) يقبل عند كل نقطة فاصلتها من $]0;+\infty[$ مماسا

$(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ، $f'(1)=0; f(1)=-e$ ومنه: $(T): y=-e$

4) أ*/ رسم (T) و (C_f):



ب*/إيجاد قيم m حتى تقبل المعادلة (E) حلين متمايزين:

لدينا m وسيط حقيقي:

إشارة $f(m)$:

m	0 α 1	$E+\infty$
$f(m)$	$+$ 0 $-$	$-$ 0 $+$

من أجل $m=1$ المعادلة (E) تقبل حلا مضاعفا .

ومنه: المعادلة (E) تقبل حلين متمايزين لما $m \in]0;1[\cup]1;+\infty[$.



1. لتكن الدالة العددية g المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=(1-x)e^{x}-1$.

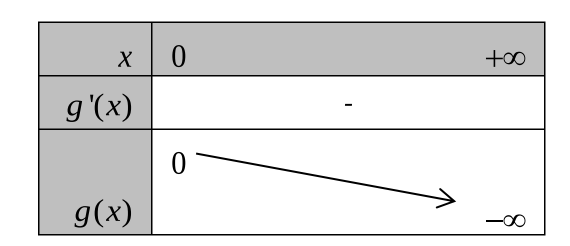
أ- دراسة تغيرات الدالة:

لدينا\: $g(0)=0$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(1-x)e^{x}-1=-\infty$

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ حيث من أجل كل x من $[0;+\infty[$ لدينا: $g'(x)=-xe^{x}$

و بالتالي الدالة g متناقصة تماما على $[0;+\infty[$

و جول تغيراتها يكون كتالي\:



x	0 $\quad\quad$ $+\infty$
$g'(x)$	-
$g(x)$	0 ↘ $-\infty$

استنتاج اشارة $g(x)$ على المجال $[0;+\infty[$.

من جدول التغيرات نلاحظ \أن \:$g(x)\leq 0$ على المجال $[0;+\infty[$

ب- تبيان ان الدالة k حيث: $k(x)=(2-x)e^{x}-x$ دالة أصلية للدالة g على المجال $[0;+\infty[$.

الدالة k قابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ حيث من أجل كل x من $[0;+\infty[$ لدينا: $k'(x)=(1-x)e^{x}-1=g(x)$

و بالتالي k دالة أصلية للدالة g على المجال $]0;+\infty[$.

ج- استنتاج حساب $\int_0^1 g(x)dx$.

$$\int_0^1 g(x)dx = k(1)-k(0) = \left[k(x)\right]_0^1 = (\mathrm{e}-1)-2 = (e-3)ua$$

2. f الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي : $f(0)=1$ و من أجل كل يختلف عن الصفر: $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$ ،

أ- أثبت أن $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

باستعمال خاصية العدد المشتق: نعلم \أن\: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x+a)-g(a)}{x-a}=g'(a)$ يكفي \أن نضع $g(x)=e^x$.

ومنه\: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x-0}=\left(e^x\right)'(0)=e^0=1$.

ب- عين نهاية الدالة f عند 0،

لدينا\: $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}=\dfrac{1}{\dfrac{e^x-1}{x}}$ اذن\: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)}=\dfrac{1}{1}=1$

\أي: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

استنتاج أن f مستمرة عند الصفر من اليمين . لدينا\: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=1$

ج- عين نهاية الدالة f عند $+\infty$. فسر النتيجة هندسيا.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\dfrac{x\left(e^x-1\right)}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{1}{x}}\right)$$

نهاية شهيرة

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0\end{array}\right\}\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

ومنه $y=0$ معادلة مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

3. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^x-1)^2}$.

f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ حيث:

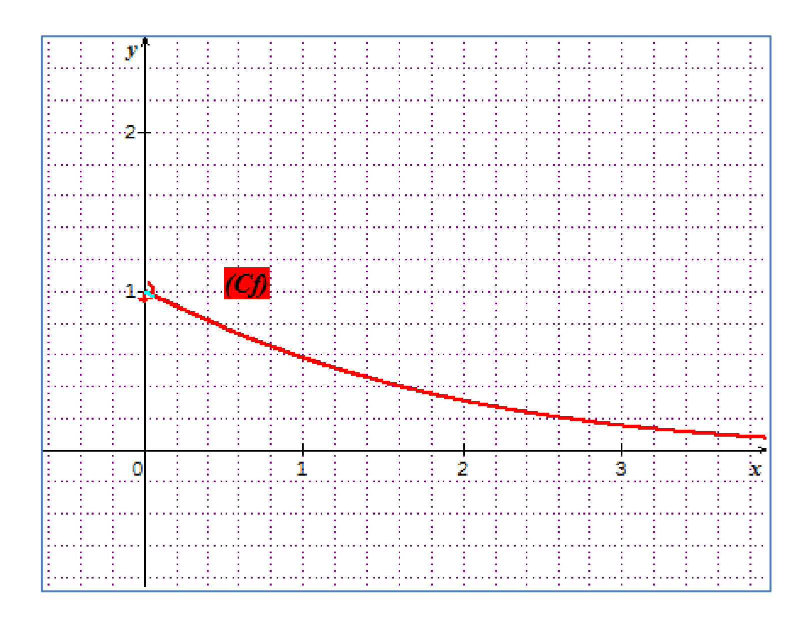
$$f'(x)=\frac{e^x-1-e^x\times x}{\left(e^x-1\right)^2}=\frac{e^x\left(1-x\right)-1}{\left(e^x-1\right)^2}=\frac{g(x)}{\left(e^x-1\right)^2}$$

ب- استنتاج تغيرات الدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

لدينا: $f'(x)=\frac{g(x)}{\left(e^x-1\right)^2}$ و مما سبق $g(x)\leq 0$ و $\left(e^x-1\right)>0$ اذن: $f'(x)<0$ أي أن الدالة متناقصة تماما على $]0;+\infty[$

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	-
$f(x)$	1 ↘ $-\infty$

ج- رسم المنحنى (C_f).



4. لتكن المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ب: $u_n=\frac{1}{n}\left[1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+...+e^{\frac{n-1}{n}}\right]$.

أ- برهن أن: $1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+...+e^{\frac{n-1}{n}}=\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$.

$1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+...+e^{\frac{n-1}{n}}=\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$ هو مجموع n حدا الأولى لمتتالية هندسة حدها الأول $v_0=1$ و أساسها $q=e^{\frac{1}{n}}$

وبالتالي: $S_n=1\times\frac{1-e^{\left(\frac{1}{n}\right)^n}}{1-e^{\frac{1}{n}}}=\frac{1-e^1}{1-e^{\frac{1}{n}}}=\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$ حدد الحدود هو n.

ثم استنتج أن: $u_n=(e-1)f\left(\frac{1}{n}\right)$.

لدينا: $f(x)=\frac{x}{e^x-1}$

$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1}$

أي: $f\left(\frac{1}{n}\right)=-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1-e^{\frac{1}{n}}}\right)$

و من جهة أخرى: $u_n=-\frac{1}{n}\left(\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}\right)=(1-e)\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1-e^{\frac{1}{n}}}\right)=-(1-e)\,f\left(\frac{1}{n}\right)$

$u_n=(e-1)\,f\left(\frac{1}{n}\right)$

ب-استنتاج باستعمال الجزء الأول من التمرين أيضا، أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو $e-1$.

بما أن : $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ و لدينا مما سبق $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=1$ و بالجداء و التركيب نجد $\lim_{n\to+\infty}u_n=e-1$ فالمتتالية (u_n) متقاربة نحو $e-1$.



I f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=a+bxe^{-x}$.

تعين العددين a و b: بقراءة بيانية لدينا: $\begin{cases} f(0)=1\Rightarrow a=1 \\ f(1)=1-\frac{1}{e}\Rightarrow 1+be^{-1}=1-\frac{1}{e}\Rightarrow b=-1 \end{cases}$ اذن: $f(x)=1-xe^{-x}$

II. g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=1+xe^{-x}$.

1.حساب نهايات الدالة g :

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}1+xe^{-x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}1+xe^{-x}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}xe^{-x}=0$$

2.دراسة اتجاه تغير الدالة g : الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$: $g'(x)=-e^{-x}+xe^{-x}=e^{-x}\left(x-1\right)$

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $e^{-x}>0$ و بالتالي اشارة $g'(x)$ من اشارة $x-1$.أي:

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$g'(x)$	- 0 +

3.جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$ $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
$g(x)$	$+\infty$ ↘ $1-e^{-1}$ ↗ $+\infty$

4.كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_g) عند النقطة التي ترتيبها1:

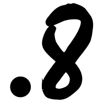
بما أن: $g(0)=1$ فبالتالي نكتب معادلة المماس عند النقطة التي فاصلتها0:

$$(T): y = g'(0)(x-0)+g(x)$$
$$y=-x+1$$

5.بين أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة انعطاف: لدينا: من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ،

$$g'(x)=e^{-x}(x-1)$$
$$g''(x)=e^{-x}(2-x)$$

نلاحظ أن $g''(x)$ تنعدم و تغير من اشارتها عند2. اذن: أي: $\omega(2;g(2))$ ، $\omega(2;1-2e^{-2})$ نقطة انعطاف للمنحني (C_g).



I. اثبات أن: $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}=0$

لدينا: $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x}}$

و بما أن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ اذن $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{e^x}{x}\right)}=0$ أي: $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}=0$

II. الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=(x+1)e^{-x}$.

1.أ-احساب نهايتي الدالة f :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x+1)e^{-x}$$
$$\begin{cases}\lim_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty\\ \lim_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

و لدينا

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+1)e^{-x}$$
$$\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty\\ \lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0\end{cases};\lim_{x\to+\infty}xe^{-x}=0\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

ب- اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث: $f'(x)=e^{-x}-(x+1)e^{-x}=-xe^{-x}$

و بالتالي اشارة $f'(x)$ من اشارة $-x$ لأن $e^{-x}>0$ على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	

جدول تغيراتها:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	0

2.رسم (C): (أنظرالشكل في نهاية التصحيح)

III. k عدد صحيح، f_k نسمي الدالة المعرفة $\mathbb{R}$ على كمايلي: $f_k(x)=(x+1)e^{kx}$.

1.أ-طبيعة الدالة f_0 : $f_0(x)=(0+1)e^{0.x}=x+1$ و بالتالي: f_0 دالة تآلفية.

ب-تعين نقط تقاطع المنحنين (C_0) و (C_1):

يعني نقوم بحل المعادلة: $f_0(x)=f_1(x)$ أي: $(x+1)e^x=x+1$ يعني:

$$(x+1)(e^x-1)=0$$

$$\begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ e^x-1=0 \Rightarrow x=0 \end{cases} \Rightarrow (C_0)\cap(C_1)=\{A(-1;0),B(0;1)\}$$

التحقق أن هذه النقطة تنتمي الى (C_k):.

لدينا: $f_k(-1)=(-1+1)e^{-1}=0$ و بالتالي $A(-1;0)\in(C_k)$.

و عليه لدينا: $f_k(0)=(0+1)e^0=1$ و بالتالي $B(0;1)\in(C_k)$.

2. اشارة العبارة: $(x+1)(e^x-1)$:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$		-	0	+		+	
e^x-1		-		-	0	+	
$(x+1)(e^x-1)$		+	0	-	0	+	

من جدول الاشارة نستنتج مايلي:

من أجل $x=-1$ و $x=0$ تكون $(x+1)(e^{x}-1)=0$.

من أجل $x\in]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$ تكون $(x+1)(e^{x}-1)>0$.

من أجل $x\in]-1;0[$ تكون $(x+1)(e^{x}-1)<0$.

استنتاج الوضعية النسبية للمنحنيين (C_k) و (C_{k+1}):

ندرس اشارة الفرق: $f_{k+1}(x)-f_k(x)$

لدينا $f_{k+1}(x)-f_k(x)=(x+1)e^{(k+1)x}-(x+1)e^{kx}=(x+1)e^{kx}(e^{x}-1)$

نستنتج ان اشارة الفرق $f_{k+1}(x)-f_k(x)$ من اشار الجداء $(x+1)(e^{x}-1)$.

مما سبق نستنتج أن:المنحنيين (C_k) و (C_{k+1}) يتقاطعان في النقطتين $A(-1;0), B(0;1)$.

على المجال $]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$ المنحنى (C_{k+1}) يقع فوق المنحنى (C_k).

على المجال $]-1;0[$ المنحنى (C_{k+1}) يقع تحت المنحنى (C_k).

3.حساب $f_k^{'}(x)$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد صحيح k غيرمعدوم. الدالة f_k قابلة للاشتقاق: $f_k'(x)=(kx+k+1)e^{kx}$

اشارة $f_k^{'}(x)$ من اشارة $(kx+k+1)$ لأن $e^{kx}>0$ مهما يكن k غيرمعدوم.

نميز الحالتين : $k>0$ و $k<0$

الحالة الأولى $k>0$:

أي: $(kx+k+1)=0\Rightarrow x=-\frac{k+1}{k}$

x	$-\infty$ $\qquad$ $-\frac{k+1}{k}$ $\qquad$ $+\infty$
$f_k'(x)$	- $\quad$ 0 $\quad$ +

اذن: من أجل $x>-\frac{k+1}{k}$ ، الدالة f_k متزايدة تماما.

من أجل $x<-\frac{k+1}{k}$ الدالة f_k متناقصة تماما.

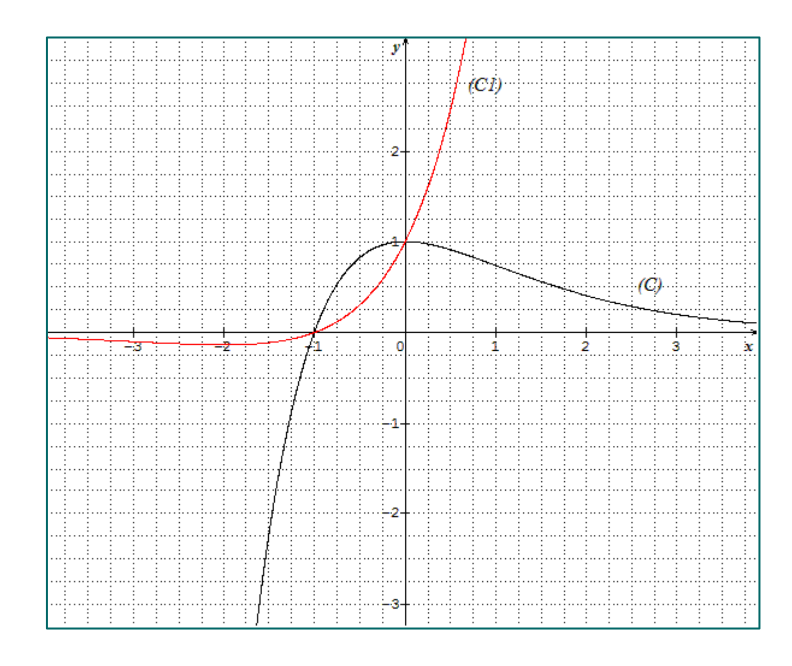
الحالة الثانية $k<0$:

x	$-\infty$		$-\frac{k+1}{k}$		$+\infty$
$f_k'(x)$		+	0	-	

اذن: من أجل $x>-\frac{k+1}{k}$ ، الدالة f_k متناقصة تماما.

من أجل $x<-\frac{k+1}{k}$ ، الدالة f_k متزايدة تماما.

4.أرسم (C) و (C_1):



9.

I.لتكن الدالة f_1 المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f_1(x)=\frac{4e^x}{e^x+7}$

1.تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f_1(x)=\frac{4}{1+7e^{-x}}$:

لدينا: $\frac{e^{-x}}{e^{-x}}\times\left(\frac{4e^x}{e^x+7}\right)=\frac{4e^{x-x}}{e^{x-x}+7e^{-x}}=\frac{4}{1+7e^{-x}}$

$$=f_1(x)$$

2.أ-بين أن للمنحنى (C_1) مستقيمين مقاربين يطلب ايجاد معادلتيهما:

لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{1+7e^{-x}}=4$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_1(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{1+7e^{-x}}=0$$

و بالتالي: المستقيم ذا المعادلة $y=4$ مقارب للمنحنى (C_1) موازي لمحور الفواصل عند $+\infty$.

المستقيم ذا المعادلة $y=0$ مقارب للمنحنى (C_1) موازي لمحور الفواصل عند $-\infty$

ب-اثبات أن الدالة f_1 متزايدة تماما على $\mathbb{R}$:

لدينا من أجل كل عدد حقيقي الدالة f_1 قابلة للاشتقاق :

$$f_1'(x)=\left(\frac{4e^x}{e^x+7}\right)'=\frac{4e^x\left(e^x+7\right)-4e^x.e^x}{\left(e^x+7\right)^2}=\frac{28e^x}{\left(e^x+7\right)^2}$$

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $\frac{28e^x}{\left(e^x+7\right)^2}>0$ و بالتالي: $f_1'(x)>0$ و عليه: أن الدالة f_1 متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

يمكن استنتاج جدول تغيراتها:.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f_1'(x)$	$+$
$f_1(x)$	$0 \nearrow 4$

ج-أثبات أنه من أجل كل x عدد حقيقي، $0<f_1(x)<4$:

لدينا الدالة f_1 متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)=4$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x)=0$ فبالتالي: $0<f_1(x)<4$.

يمكن ملاحظته من خلال جدول تغيرات الدالة f_1.

3.أ-من اجل كل x ، $(2\ln 7-x)$ من $\mathbb{R}$ نثبت أنه: $f_1(2\ln 7-x)+f_1(x)=4$.

أي:

$$\begin{aligned}f_1(2\ln 7-x)+f_1(x)&=\frac{4e^{2\ln 7-x}}{e^{2\ln 7-x}+7}+\frac{4}{1+7e^{-4}}\\&=\frac{4(49)e^{-x}}{49e^{-x}+7}+\frac{4}{1+7e^{-4}}\\&=\frac{28e^{-x}}{7e^{-x}+1}+\frac{4}{1+7e^{-4}}\\&=4\left(\frac{1+7e^{-4}}{1+7e^{-4}}\right)\\&=4\end{aligned}$$

اذن النقطة $I_1(\ln 7;2)$ مركز تناظر للمنحنى (C_1):

ب- معادلة المماس (T_1) للمنحنى (C_1) عند النقطة I_1: تكتب من الشكل:

$$(T_1): y = f_1'(\ln 7)(x-\ln 7)+ f_1(\ln 7)$$
$$(T_1): y =(x-\ln 7)+2$$
$$(T_1): y = x-\ln 7+2$$

ج-أرسم المماس (T_1): أنظر في الأسفل

4.أ-تعين دالة أصلية للدالة f_1 على $\mathbb{R}$:

لدينا: $f_1(x)=\dfrac{4e^x}{e^x+7}$ نلاحظ أن اذا قمنا باشتقاق المقام سنتحصل عليه في البسط جداء 4: يعني:

$f_1(x)=\dfrac{4\left(e^x+7\right)'}{e^x+7}$ اذن : $F_1(x)=4\ln\left(e^x+7\right)+c, c\in\mathbb{R}$

ب- القيمة المتوسطة للدالة $\mathbb{R}$ على المجال $[0;\ln 7]$.

$m=\dfrac{1}{\ln 7}\int_0^{\ln 7} f_1(x)dx$ و منه:

$$m=\frac{1}{\ln 7}\left[F_1(\ln 7)-F_1(0)\right]=\frac{1}{\ln 7}\left[4\ln\left(e^{\ln 7}+7\right)-4\ln\left(e^0+7\right)\right]$$
$$=\frac{1}{\ln 7}\left[4\ln 14-4\ln 8\right]$$
$$=\frac{4}{\ln 7}\ln\left(\frac{14}{8}\right)$$
$$m=\frac{4}{\ln 7}\ln\left(\frac{7}{4}\right)$$

II.1.أثبت أنه من لأجل كل عدد طبيعي n غير معدوم النقطة $A\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ تنتمي للمنحنى (C_n) :

يعني: $f_n(0)=\dfrac{1}{2}$ (فرضية التراجع)

من أجل $n=1$ لدينا: $f_1(0)=\dfrac{4e^0}{e^0+7}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$. و بالتالي: محققة.

نفرض أنها محققة من كل عدد طبيعي n غير معدوم و نثبت صحتها من أجل الرتبة $n+1$ أي: $f_{n+1}(0)=\dfrac{1}{2}$.

لدينا: $f_n(0)=\dfrac{1}{2}$ أي: $\dfrac{4e^{n0}}{e^{n0}+7}=\dfrac{1}{2}$ و منه: $\dfrac{4e^{(n+1)0}}{e^{(n+1)0}+7}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$ و عليه: $f_{n+1}(0)=\dfrac{1}{2}$.

اذن حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع لدينا: من كل عدد طبيعي n غير معدوم $f_n(0)=\dfrac{1}{2}$ يعني: النقطة $A\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ تنتمي للمنحنى (C_n)

و يمكن الاستنتاج أن جميع المنحنيات (C_n) تلتقي في نقطة وحيدة هي $A\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

2.أ-اثبات أنه مهما تغيرت قيمة n من $\mathbb{N}^*$ فان المستقيم ذا المعادلة $y=2$ يقطع (C_n) في نقطة I_n:

نقوم بحل المعادلة : $f_n(x)=y$ أي:

$$\frac{4e^{nx}}{e^{nx}+7}=2$$
$$4e^{nx}=2\left(e^{nx}+7\right)$$
$$2e^{nx}=14 \Leftrightarrow e^{nx}=7$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{\ln 7}{n}$$

اذن: النقطة I_n ذات لفاصلة $x=\frac{\ln 7}{n}$ $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ هي نقطة تقاطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$ مع $\left(C_n\right)$.

ب-معادلة المماس $\left(T_n\right)$ للمنحنى $\left(C_n\right)$ عند النقطة I_n :

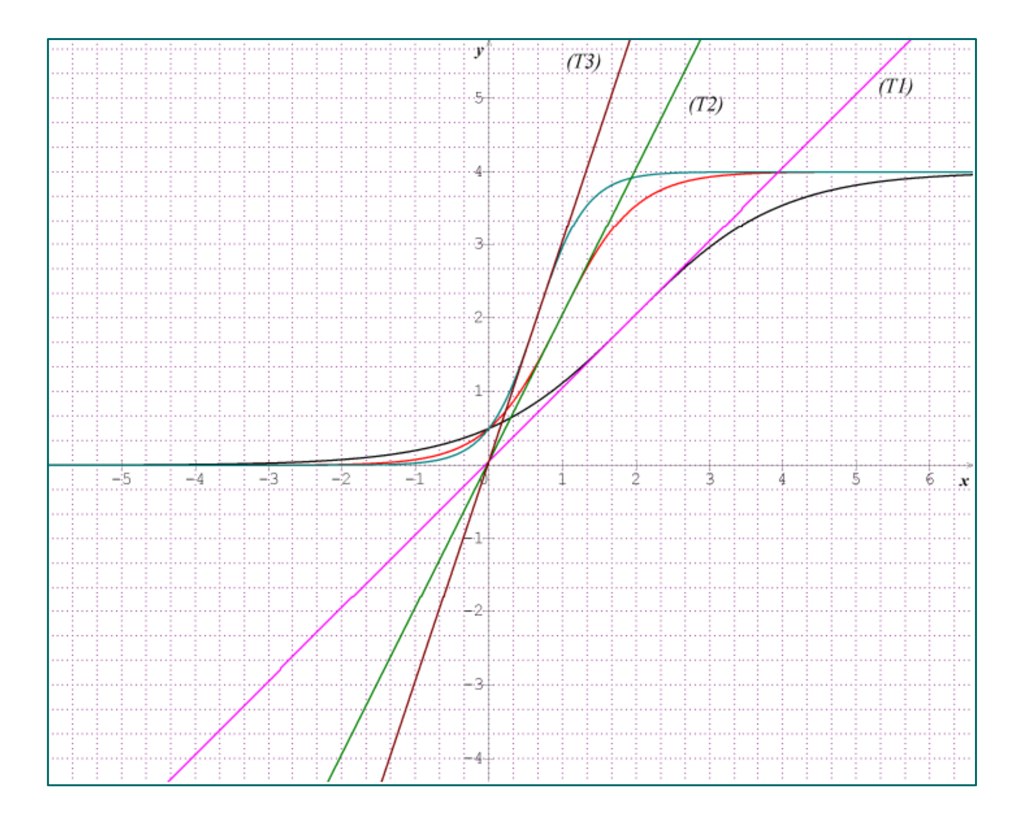
$\left(T_n\right): y=f_n'\left(\frac{\ln 7}{n}\right)\left(x-\frac{\ln 7}{n}\right)+f_n\left(\frac{\ln 7}{n}\right)$ و بالتالي: $f_n\left(\frac{\ln 7}{n}\right)=2$ و ولدينا:

$$f_n'(x)=\frac{28n.e^{nx}}{\left(e^{nx}+7\right)^2}$$
$$f_n'\left(\frac{\ln 7}{n}\right)=n$$

و منه نجد ما يلي:

$$\left(T_n\right): y=n\left(x-\frac{\ln 7}{n}\right)+2$$
$$\left(T_n\right): y=nx-\ln 7+2$$

ج-رسم $\left(T_2\right)$ و $\left(T_3\right)$.



.10

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)$

.1

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)=+\infty$$

لأن
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}-x+\frac{5}{2}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}-\frac{1}{2}e^{x-2}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^{x-2}-4=-4\end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)=-\infty$$

2.أ-اثبات أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-x+\frac{5}{2}$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $-\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x)-y&=\lim_{x\to-\infty}-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)-\left(-x+\frac{5}{2}\right)\\&=\lim_{x\to-\infty}-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)\\&=0\end{aligned}$$

ب- حل المعادلة $e^{x-2}-4=0$:

$$\begin{aligned}e^{x-2}-4=0&\Leftrightarrow x-2=\ln 4\\&\Leftrightarrow x=2+\ln 4\end{aligned}$$

لدراسة وضعية المستقيم (Δ) و المنحنى (C) نقوم بدراسة اشارة الفرق $f(x)-y$.

$$f(x)-y=-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)$$

نلخص الاشارة في الجدول التالي مما سبق :

x	$-\infty$	$2+\ln 4$	$+\infty$
$-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)$	+	0	-
الوضعية	(C) فوق (Δ)		(C) تحت (Δ)

$$(C)\cap(\Delta)=\left(2+\ln 4;\ f(2+\ln 4)\right)$$

.3

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}-1+\frac{5}{2x}-\frac{1}{2x}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}-1+\frac{5}{2x}=-1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{1}{2x}e^{x-2}=-\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}e^{x-2}-4=+\infty\end{cases}.$$

4.أ-بين أن

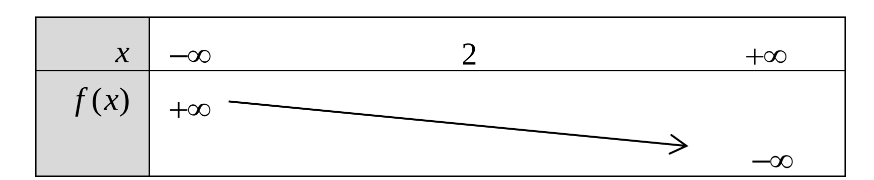
الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$،

$$\begin{aligned}f'(x)&=-1-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)-\frac{1}{2}e^{x-2}.e^{x-2}\\&=-1-\left(e^{x-2}\right)^2+2e^{x-2}\\&=-\left[1+\left(e^{x-2}\right)^2-2e^{x-2}\right]\end{aligned}$$

و منه لكل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=-\left(e^{x-2}-1\right)^2$.

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $-\left(e^{x-2}-1\right)^2<0$. أي $f'(x)<0$ و عليه الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$،

ب- جدول تغيرات الدالة f :



x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$

5..أحسب من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f''(x)$

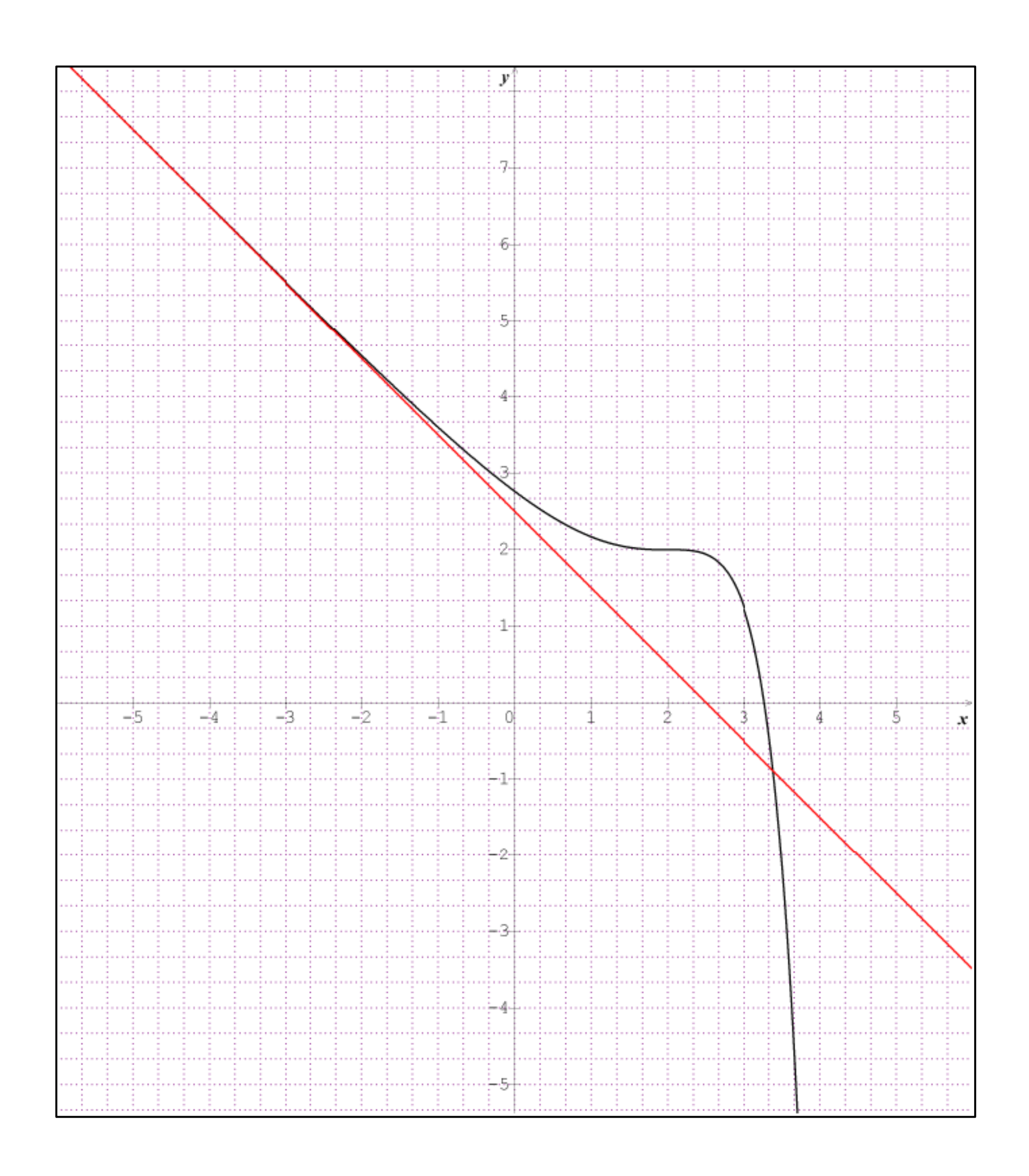
الدالة f' قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، $f''(x)=-2e^{x-2}\left(e^{x-2}-1\right)$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	-	

بما أن f'' تنعدم عند 2 و تغير منم اشارتها فان $A(2;2)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C).

6.اثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث، $2+\ln 3<\alpha<2+\ln 4$. (تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة)

7.أنشئ (Δ) و (C) في نفس المعلم (نأخذ القيمتين المقربتين التاليتين $\ln 2\simeq 0,7$ ، $\ln 3\simeq 1,1$).



.11

I. الدالة φ معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $\varphi(x)=(x^2+x+1)e^{-x}-1$.

1.أ- نهايتي الدالة φ عند $-\infty$ و $+\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^2+x+1)e^{-x}-1=+\infty$$

لأن: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+x+1)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty\end{cases}$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+x+1)e^{-x}-1=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-x}+xe^{-x}+e^{-x}-1=-1$

ب-دراسة اتجاه تغير الدالة φ :

الدالة φ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ،

$$\varphi'(x)=(2x+1)e^{-x}-\left(x^2+x+1\right)e^{-x}$$
$$=e^{-x}\left(2x+1-x^2-x-1\right)=\left(-x^2+x\right)e^{-x}$$

و بالتالي: $\varphi'(x)=\left(-x^2+x\right)e^{-x}$ لدينا من x من $\mathbb{R}$ $0<e^{-x}$.

و عليه اشارة $\varphi'(x)$ من اشارة $\left(-x^2+x\right)$.أي:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\left(-x^2+x\right)$		-	**0**	+	**0**	-	

جدول تغيرات:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		-	0	+	0	-	
$\varphi(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{3}{e}-1$	↘	-1

2.لدينا: $\varphi(0)=0$ و الدالة φ مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ و متزايدة تماما على المجال $[0;1]$

لكن من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم من $]-\infty;1]$ لدينا $\varphi(x)>\varphi(0)$ أي $\varphi(x)>0$.

اذن من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم من $]-\infty;1]$ ، $\varphi(x)\neq 0$. اذن $\beta=0$.

الدالة φ مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$ مع $\varphi(1)=\frac{3}{e}-1>0$ و $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=-1<0$.

و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $\varphi(x)=0$ تقبل حل α حيث $\alpha\in[1;+\infty[$

تعين حصر α: لدينا: $\varphi(1)=\frac{3}{e}-1>0$ و الدالة φ مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$

باستعمال الآلة الحاسبة نجد $\varphi(1,79)=0,0007>0$ و $\varphi(1,8)=-0,001<0$ و عليه $1,79<\alpha<1,8$.

3.اشارة $\varphi(x)$:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$\varphi(x)$		+	0	+	0	-	

II. 1.لدينا: $f(0)=1$ و $g(0)=1$ فبالتالي: المنحنين $\left(C_f\right)$ و $\left(C_g\right)$ يمران بالنقطة $A(0;1)$.

*معادلة المماس عند النقطة A:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$: $f'(x)=\left(-2x+1\right)e^{-x}$.

معادلة المماس عند النقطة A للمنحنى $\left(C_f\right)$ هي: $y=x-1$

لدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$: $g'(x)=\dfrac{-2x^2-2x+1}{\left(x^2+x+1\right)}$.

معادلة المماس عند النقطة A للمنحنى $\left(C_g\right)$ هي: $y=x-1$.

2.أ- ليكن x من $\mathbb{R}$ ،

$$\begin{aligned} f(x)-g(x) &= (2x+1)e^{-x}-\frac{2x+1}{x^2+x+1} \\ &= (2x+1)\left(e^{-x}-\frac{1}{x^2+x+1}\right) \\ &= \frac{(2x+1)\left[(x^2+x+1)e^{-x}-1\right]}{x^2+x+1} \\ &= \frac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1} \end{aligned}$$

اذن من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ ، $f(x)-g(x)=\dfrac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$

ب- اشارة $f(x)-g(x)$ على $\mathbb{R}$:

لدينا: من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ ، $x^2+x+1>0$ $\quad(\Delta<0;a>0)$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		α		$+\infty$
$2x+1$		-	0			+			
$\varphi(x)$				+	0	+	0	-	
$f(x)-g(x)$		-	0	+	0	+	0	-	

ج-الوضع النسبي للمنحنيين $\left(C_f\right)$ و $\left(C_g\right)$:

على المجال $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$ و $]\alpha;+\infty[$ المنحنى $\left(C_f\right)$ يقع تحت المنحنى $\left(C_g\right)$

و على المجال $\left]-\frac{1}{2};\alpha\right[$ المنحنى $\left(C_f\right)$ يقع فوق المنحنى $\left(C_g\right)$.

المنحنيين $\left(C_f\right)$ و $\left(C_g\right)$ يتقاطعان في النقط: $(0;1)$, $\left(-\frac{1}{2};0\right)$ و $(\alpha;f(\alpha))$

.12

لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=e^{x}-x^{2}+3x-1$.

1. لدينا:
$$\begin{aligned} g(0) &= e^{0}-0^{2}+3(0)-1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

و عليه: $g(0)=0$.

2.تحديد اشارة $g(x)$:

من أجل $x\leq 0$ و انطلاقا من جدول تغيرات الدالة لدينا: g دالة متزايدة و عليه $g(x)\leq g(0)$

و بالتالي: $g(x)\leq 0$

و من أجل $x\geq 0$ و انطلاقا من جدول تغيرات الدالة لدينا: g دالة متزايدة و عليه $g(x)\geq g(0)$

و بالتالي: $g(x)\geq 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	

II. لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\left(x^{2}-x\right)e^{-x}+x$.

1.أ- لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^{2}}{e^{x}}-\frac{x}{e^{x}}+x \\ &= \left(x^{2}-x\right)\frac{1}{e^{x}}+x \\ &= \frac{x^{2}}{e^{x}}-\frac{x}{e^{x}}+x \end{aligned}$$

نحسب النهاية:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2}}{e^{x}}-\frac{x}{e^{x}}+x=+\infty \ .$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{2}}{e^{x}}=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x}}=0 \end{cases}$$

ب-حساب:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}+x-x$$

:

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}$$
$$=0$$

و بالتالي المنحنى (C) يقبل مستقيم مقارب (D) بجوار $+\infty$ معادلته $y=x$.

ج-لدينا:

$$\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}+x=\frac{x^2-x+xe^x}{e^x}$$
$$=f(x)$$

و عليه $f(x)=\dfrac{x^2-x+xe^x}{e^x}$

حساب $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-x+xe^x}{e^x}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^x}\left(x^2-x+xe^x\right)=+\infty$.

2.أ-لدينا $f(x)-x=(x^2-x)e^{-x}$ و عليه $e^{-x}>0$ من اجل كل x من $\mathbb{R}$.

و بالتالي $f(x)-x$ و x^2-x لهما نفس الاشارة من أجل كل x من $\mathbb{R}$. أي:

x	$+\infty$ 0 1 $+\infty$
x^2-x	+ 0 - 0 +

ب- بما أن $f(x)-x$ و x^2-x لهما نفس الاشارة من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فان الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (D).

و بالتالي المنحنى (C) يوجد فوق (D) على المجالين $]-\infty;0]$ و $[1;+\infty[$ و تحت (D) على المجال $[0;1]$.

3.أ- الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

$$f'(x)=(2x-1)e^{-x}-(x^2-x)e^{-x}+1$$
$$=e^{-x}\left(2x-1-x^2+x+e^x\right)$$
$$=e^{-x}\left(e^x-x^2+3x-1\right)$$
$$=e^{-x}g(x)$$

و بالتالي من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $f'(x)=g(x)e^{-x}$.

ب- لدينا $e^{-x}>0$ على $\mathbb{R}$ و بالتالي اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$.

أي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	

اذن الدالة f متناقصة على $]-\infty;0]$ و متزايدة على المجال $[0;+\infty[$.

ج-جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

4.أ-تحقق من أن $f''(x)=(x^2-5x+4)e^{-x}$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$.

الدالة f' قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$،

$$\begin{aligned} f''(x) &= -e^{-x}\left(e^x - x^2 + 3x - 1\right) + e^{-x}\left(e^x - 2x + 3\right) \\ &= -e^{-x}\left(-e^x + x^2 - 3x + 1 + e^x - 2x + 3\right) \\ &= e^{-x}\left(x^2 - 5x + 4\right) \end{aligned}$$

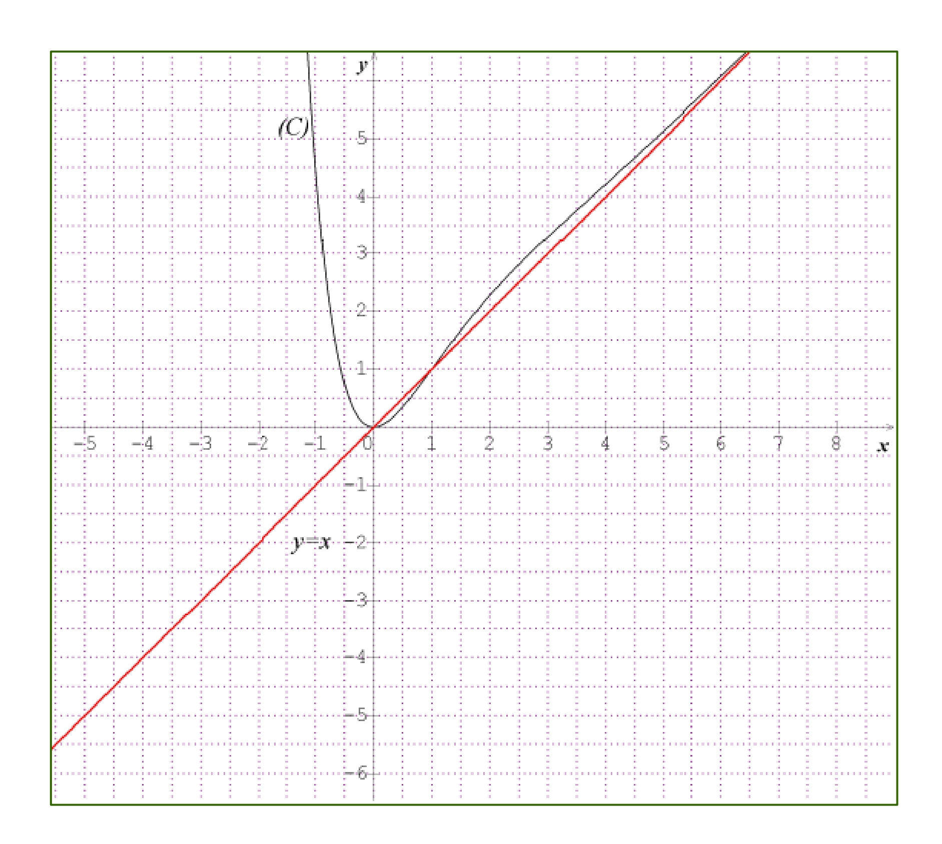
و عليه اشارة $f''(x)$ من اشارة x^2-5x+4 أي:

x	$+\infty$		1		4		$+\infty$
x^2-x		+	0	-	0	+	

لدينا المشتقة الثانية تنعدم و تغير من اشارتها عند 1 و بالتالي النقطة $A(1;f(1))$ نقطة انعطاف للمنحنى (C).

ولدينا المشتقة الثانية تنعدم و تغير من اشارتها عند 4 و بالتالي النقطة $B(4:f(4))$ نقطة انعطاف للمنحنى (C).

5. انشاء (D) و (C):



.13

I.لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=e^{-2x-1}+3x-1$. (C_f) و تمثيلها البياني في معلم متعامد ز متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.أ-حساب

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{-2x-1}+3x-1=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} e^{-2x-1}+3x-1=\lim_{x\to-\infty} e^{-2x-1}\left(1+\frac{3x}{e^{-2x-1}}-\frac{1}{e^{-2x-1}}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty} e^{-2x-1}\left(1+3xe^{2x+1}-e^{2x+1}\right)$$

$$==\lim_{x\to-\infty} e^{-2x-1}=+\infty$$

أن: $\lim_{x\to-\infty}\left(3xe^{2x+1}\right)=0$.

و منه

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-2x-1}+3x-1}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-2x-1}}{x}+\frac{3x}{x}+\frac{1}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{xe^{2x+1}}+3+\frac{1}{x}$$

$$=-\infty$$

.

ب-لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(3x-1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[e^{-2x-1}+3x-1-(3x-1)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty} e^{-2x-1}$$

$$=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(3x-1)\right]=0$$

التفسير: نقول أن المستقيم ذا المعادلة $y=3x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

2. اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث: $f'(x)=-2e^{-2x-1}+3$

و منه $f'(x)=0$ تكافئ

$$-2e^{-2x-1}+3=0 \Leftrightarrow e^{-2x-1}=\frac{3}{2}$$

نستنتج أن :

$$-2x-1=\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$x=-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)+1\right)$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)+1\right)$		$+\infty$
$-2e^{-2x-1}+3$		-	0	+	

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)+1\right)$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f\left(-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)+1\right)\right)$	↗	$+\infty$

لدينا:

$$f(x)=e^{-2x-1}+3x-1$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)+1\right)\right)=e^{-2\left(-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)+1\right)\right)-1}+3\left(-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)+1\right)\right)-1$$

$$=\frac{3}{2}+3\left(-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)+1\right)\right)-1$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)+1\right)-1$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)+1\right)$$

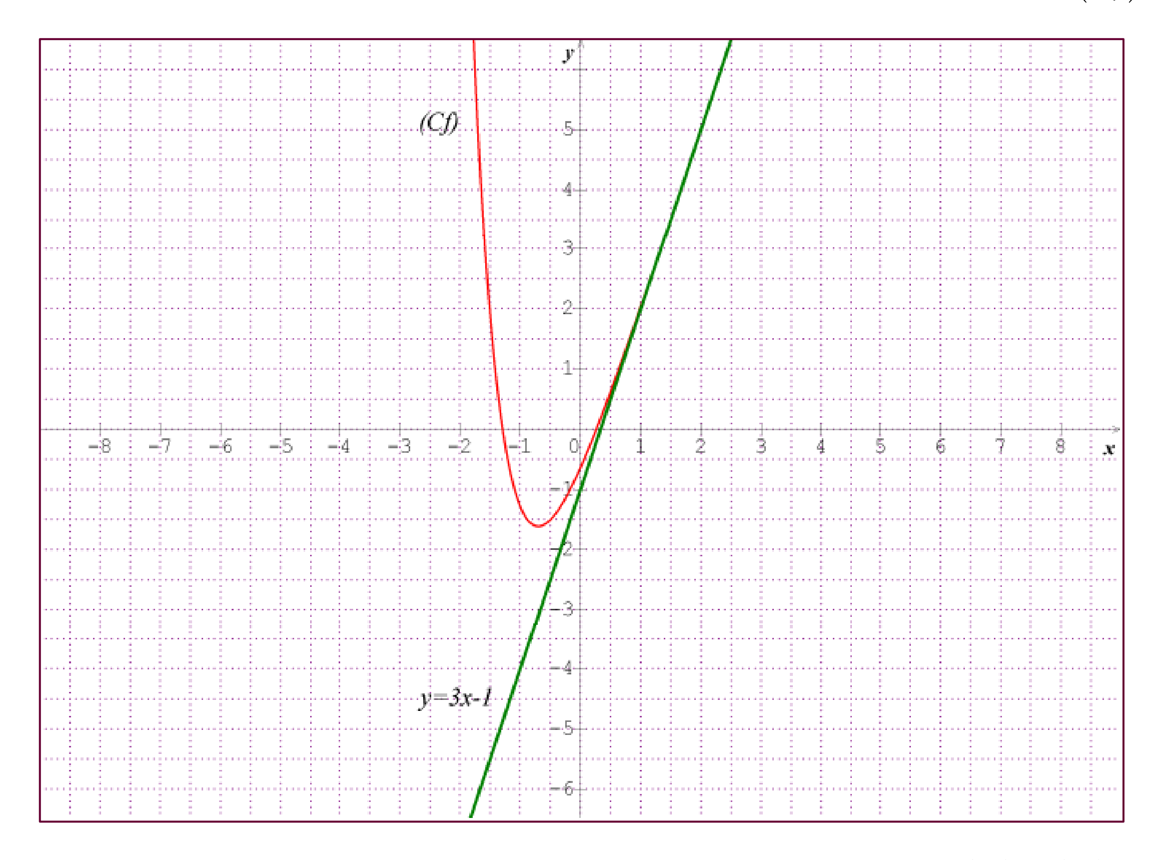
$$\simeq -1,6$$

3. الدالة f مستمرة و رتيبة على المجال $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)+1\right)\right[$ و $f(-1,3)\times f(-1,2)<0$

و لدينا كذالك الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $\left]-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)+1\right);+\infty\right[$ و لدينا: $f(0,2)\times f(0,3)<0$

اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β بحيث $-1,3<\alpha<-1,2$ $0,2<\beta<0,3$.

4.رسم المنحنى (C_f):



II.نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين كما يلي: $u_n=e^{-2n-1}$ و $v_n=3n-1$.

.1

لدينا: $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{e^{-2(n+1)-1}}{e^{-2n-1}}=e^{-2(n+1)-1+2n+1}=e^{-2}$

و منه المتتالية (u_n) هندسية أساسها $q=e^{-2}$ و حدها الأول $u_0=e^{-1}$.

و لدينا: $v_{n+1}-v_n=3(n+1)-1-3n+1=3$ و منه نجد أن المتتالية (v_n) حسابية

أساسها $r=3$ و حدها الأول $v_0=-1$.

2. اتجاه تغير المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

بما أن $r=3>0$ فان المتتالية (v_n) متتالية متزايدة .

بما أن الأساس $-1<e^{-2}<1$ و الحد الأول $e^{-1}>0$ فان (u_n) متتالية متزايدة .

3.لدينا: (v_n) متتالية متزايدة و (u_n) متتالية متزايدة

ومن جهة أخرى لدينا:

$$\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = \lim_{n\to+\infty} 3n-1-e^{-2n-1} = +\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = +\infty$$

اذن المتتاليتين (u_n) و (v_n) ليس بمتتاليتين متجاورتان .

4. حساب المجموع S_n بدلالة n:

بحيث : $S_n = f(0)+f(1)+...+f(n)$ يكفي ان نلاحظ أن $f(n)=u_n+v_n$

و بالتالي:

$$\begin{aligned} S_n &= f(0)+f(1)+...+f(n) \\ &= u_0+u_1+...+u_n+v_0+v_1+...+v_n \\ &= e^{-1}\left(\frac{1-e^{-2(n+1)}}{1-e^{-2}}\right)+(n+1)\left(\frac{-1-1+3n}{2}\right) \\ &= \left(\frac{e^{-1}}{1-e^{-2}}\right)\left(1-e^{-2(n+1)}\right)+(n+1)\left(\frac{-2+3n}{2}\right) \end{aligned}$$

ب-احسب $\lim_{n\to+\infty} S_n$ $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{e^{-1}}{1-e^{-2}}\right)\left(1-e^{-2(n+1)}\right)+(n+1)\left(\frac{-2+3n}{2}\right)=+\infty$

حساب $\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n^2}$.

اذن:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n^2} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{e^{-1}}{1-e^{-2}}\right)\left(1-e^{-2(n+1)}\right)+(n+1)\left(\frac{-2+3n}{2}\right)}{n^2} \\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{e^{-1}}{1-e^{-2}}\right)\left(1-e^{-2(n+1)}\right)}{n^2}+\frac{(n+1)\left(\frac{-2+3n}{2}\right)}{n^2} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{e^{-1}}{1-e^{-2}}\right)\frac{\left(1-e^{-2(n+1)}\right)}{n^2}=0 \\ \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)\left(\frac{-2+3n}{2}\right)}{n^2}=\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n^2}=\frac{3}{2}$$

.14

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=xe^{1-x}$.

1.ليكن x عدد حقيقي $f(x)=xe^{1-x}=x\times e\times e^{-x}=ex\frac{1}{e^x}$

اذن بين أنه من اجل كل x عدد حقيقي، $f(x)=e\times\frac{x}{e^x}$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^{1-x} = -\infty$

.2 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^{1-x} = \lim_{x\to+\infty} e\times\frac{x}{e^x} = 0$ اذن $y=0$ معادلة مستقيم مقارب لمنحنى الدالة f عند $+\infty$.

.3 اتجاه تغير الدالة f الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، $f'(x) = (1-x)e^{1-x}$.

من أجل كل عدد حقيقي x، $e^{1-x} > 0$ و بالتالي اشارة $f'(x)$ من اشارة $1-x$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		+	0	-	

جدول تغيرات:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	0

II.1. ليكن x عدد حقيقي،

$$\begin{aligned}(1-x)g_n(x) &= g_n(x) - xg_n(x)\\ &= (1+x+x^2+...+x^n) - x(1+x+x^2+...+x^n)\\ &= (1+x+x^2+...+x^n) - (x+x^2+...+x^n+x^{n+1})\\ &= 1-x^{n+1}\end{aligned}$$

اذن من أجل كل $x \neq 1$، $g_n(x) = \frac{(1-x^{n+1})}{(1-x)}$.

.2تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي يختلف عن 1،

نلاحظ أن أنه من أجل كل عدد حقيقي يختلف عن 1، $h_n(x) = g_n'(x)$ و عليه

و بالتالي:

$$\begin{aligned}g'_n(x) &= \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2}\\ &= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

.3نضع $S_n = f(1) + f(2) + ... + f(n)$:

حساب بدلالة n المجموع S_n:

$$S_n = f(1)+f(2)+\ldots+f(n)=\frac{1}{e^0}+\frac{2}{e^1}+\frac{3}{e^2}+\ldots+\frac{n}{e^{n-1}}$$
$$=1+2\left(\frac{1}{e}\right)^1+3\left(\frac{1}{e}\right)^2+\ldots+n\left(\frac{1}{e}\right)^n$$
$$=h_n\left(\frac{1}{e}\right)$$
$$=\frac{n\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}-(n+1)\left(\frac{1}{e}\right)^n+1}{\left(1-\frac{1}{e}\right)^2}$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $n\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}=ne^{-n-1}=e^{-2}ne^{1-n}=e^{-2}f(n)$

و عليه $\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}=\lim_{n\to+\infty} e^{-2}f(n)=0$.

و كذلك $(n+1)\left(\frac{1}{e}\right)^n=(n+1)e^{-n}=f(n+1)$

و عليه نستنتج ان: $\lim_{n\to+\infty} S_n=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{e}\right)^2}=\left(\frac{e}{e-1}\right)^2$.

.15

I.الدالة g المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=e^x-x-1$.

1. اتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للاشتقاق على $[0;+\infty[$ ، $g'(x)=e^x-1$.

x	0 $\quad$ $+\infty$
e^x-1	+

و عليه الدالة g متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

2.عين حسب قيم x اشارة $g(x)$:

بما أن $g(0)=0$ و الدالة g متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$. اذن من أجل كل x من $[0;+\infty[$ ، $g(x)\geq g(0)=0$.

x	0 $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$g(x)$	$+$

3. لدينا: $g(x)\geq 0$ أي: $e^x-x\geq 1 \Leftrightarrow e^x-x-1\geq 0$
$\Leftrightarrow e^x-x\geq 0$

اذن من أجل كل x من $[0;+\infty[$ ، $e^x-x>0$.

II. الدالة f المعرفة على المجال $[0;1]$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$

1. لدينا $x\in[0;1]$ و بما أن f دالة متزايدة تماما على المجال $[0;1]$ فان ، $f(0)\leq f(x)\leq f(1)$.

أي $0\leq f(x)\leq 1$ تكافئ $f(x)\in[0;1]$.

اذن من أجل كل x من $[0;1]$ ، $f(x)\in[0;1]$.

2.أ-

$$f(x)-x=\frac{e^x-1}{e^x-x}-x=\frac{e^x-1-x\left(e^x-x\right)}{e^x-x}=\frac{(1-x)\left(e^x-(1+x)\right)}{e^x-x}$$

اذن : $f(x)-x=\dfrac{(1-x)g(x)}{e^x-x}$.

ب- الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (D):

من أجل كل x من $[0;1]$، $g(x)\geq 0$ و $1-x>0$ و $e^x-x>0$

اذن $f(x)-x>0$ أي أن للمنحنى (C) يقع فوق المستقيم (D) و يتقاطعان في النقطة $(0;0)$ و $(1;1)$.

3.أ- دالة أصلية للدالة f على $[0;1]$.

نلاحظ أن: $\left(e^x-x\right)'=e^x-1$ و عليه $F(x)=\ln\left(e^x-x\right)+c,\left(c\in\mathbb{R}\right)$

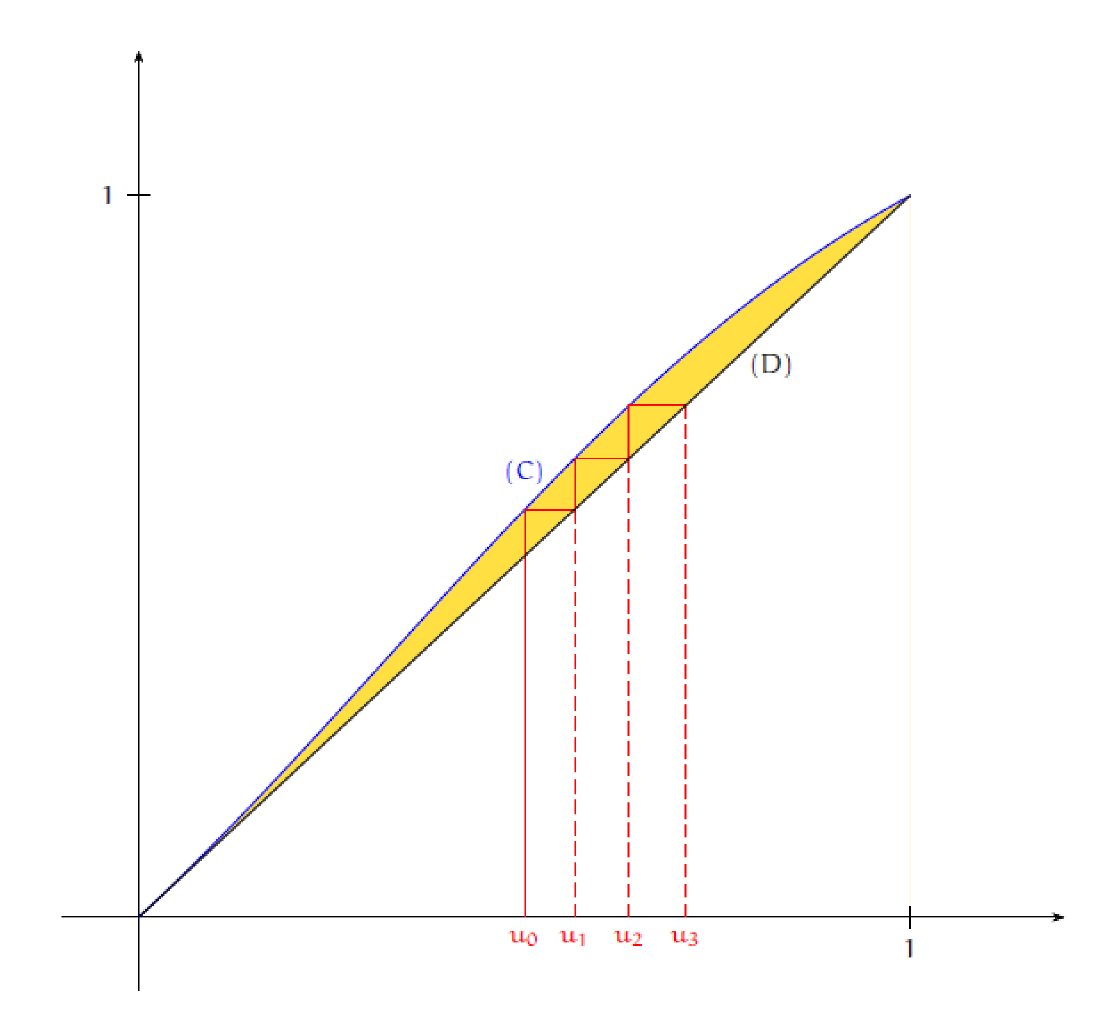
ب- مساحة الحيز:

على المجال $[0;1]$ $f(x)>x$ و بالتالي:

$$\int_0^1 f(x)-xdx=\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 xdx=\left[F(x)\right]_0^1-\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$
$$=\ln(e-1)-\frac{1}{2}u.a$$

الجزء الثالث:

1. خطوط التمثيل.



2. لدينا: $u_0=\frac{1}{2}$ و منه $\frac{1}{2}\le u_0\le 1$.

ليكن $n\ge 0$ نفرض أن $\frac{1}{2}\le u_n\le 1$ و بما أن f دالة متزايدة تماما على المجال $[0;1]$

و منه نستنتج أن $f\left(\frac{1}{2}\right)\le f\left(u_n\right)\le f\left(1\right)$ أي: $\frac{1}{2}\le u_{n+1}\le 1$.

و عليه حسب خاصية الاستدلال بالتراجع لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $\frac{1}{2}\le u_n\le 1$.

حسب ما سبق لدينا على المجال $[0;1]$، $f(x)>x$ و بما أن $u_n\in[0;1]$

فان $f\left(u_n\right)\ge u_n$.

اذن من أجل عدد طبيعي n، $\frac{1}{2}<u_n<u_{n+1}<1$.

3. بما أن المتتالية $\left(u_n\right)$ متزايدة و محدودة من الأعلى بالعدد 1 فهي متقاربة نحو العدد l حيث $l\in[0;1]$.

لأن $\frac{1}{2}\le u_n\le 1$.

. $l=\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}=\lim_{n\to+\infty} f\left(u_n\right)=f\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right)=f(l)$

من أجل $x=1$ لدينا $f(x)=x$ و بالتالي، $l=1$ و عليه: $\lim_{n\to+\infty} u_n=1$



التمرين «1» «2008ك» «1ر» «7,5 ن»

I) نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[-2;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=(ax+b)e^{-x}+1$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول $1\,cm$.

عيّن قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1;1)$ تنتمي إلى (C_f) و معامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$.

II) نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[-2;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=(-x-1)e^{-x}+1$.

(C_g) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق .

1) بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ و فسر النتيجة بيانيا. (نذكر أنّ $\lim\limits_{u\to-\infty} ue^{u}=0$)

2) أدرس تغيّرات الدالة g ، ثم أنشئ جدول تغيراتها .

3) بيّن أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة إنعطاف I يطلب تعيين إحداثييها .

4) أكتب معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة I.

5) أرسم (C_g) .

6) H الدالة العددية المعرفة على المجال $[-2;+\infty[$ كما يلي : $H(x)=(\alpha x+\beta)e^{-x}$ حيث α و β عددان حقيقيان

- عيّن α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة : $x\mapsto g(x)-1$. استنتج الدالة الأصلية للدالة g و التي تنعدم عند القيمة 0 .

III) لتكن k الدالة المعرفة على المجال $[-2;+\infty[$ كما يأتي : $k(x)=g(x^2)$

باستعمال مشتقة دالة مركبة ، عيّن اتجاه تغيّر الدالة k ثم شكل جدول تغيّراتها .

التمرين «2» «2010ك» «2ر» «7 ن»

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $f(x)=x-\dfrac{1}{e^{x}-1}$

نرمز بـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- أحسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)$ و فسر هندسيا النتيجة .

2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة f على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3) أ- بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') معادلتيهما على الترتيب : $y=x$ و $y=x+1$.

ب- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ').

4) أثبت أن النقطة $\omega\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

5) أ- بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّين α و β حيث : $\ln 2<\alpha<1$ و $-1.4<\beta<-1.3$.

ب- هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ)؟

جـ- أرسم (Δ) ، (Δ') ثم المنحنى (C_f) .

د - ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد و إشارة حلول المعادلة : $(m-1)e^{-x}=m$

التمرين «3» «بك2011» «م2» «7 ن»

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{x}-ex-1$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ - أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

بـ - أحسب $f'(x)$ ثمّ أدرس إشارتها.

جـ - شكّل جدول تغيّرات الدالة f.

2) أ - بيّن أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=-ex-1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $(-\infty)$.

بـ - أكتب معادلة للمستقيم (T) مماس للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

جـ - بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$، تقبل في المجال $]1,75;1,76[$ حلا وحيدا α.

د - أرسم المستقيمين (Δ) و (T) ثم المنحنى (C_f) على المجال $]-\infty;2]$.

3) أ - أحسب بدلالة α، المساحة $A(\alpha)$ للحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f)، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتيهما: $x=0$ ، $x=\alpha$.

بـ - أثبت أنّ : $A(\alpha)=\left(\frac{1}{2}e\alpha^{2}-e\alpha+\alpha\right)ua$ (ua هي وحدة المساحات)

التمرين «4» «بك2012» «م2» «7 ن»

I) لتكن g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1-xe^{x}$.

1) أحسب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3) أ - بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$، تقبل في حلا وحيدا α على المجال $]-1;+\infty[$

بـ - تحقق أنّ $0.5<\alpha<0.6$، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;2]$ كما يلي : $f(x)=(x-1)e^{x}-x-1$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

2) لتكن f' مشتقة الدالة f. بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;2]$ فإن : $f'(x)=-g(x)$ ، استنتج إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty;2]$ ، ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة f.

3) بيّن أنّ $f(\alpha)=-\left(\frac{\alpha^{2}+1}{\alpha}\right)$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تدوّر النتائج إلى 10^{-2})

4) أ - بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x-1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

بـ - أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

5) أ - بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّين x_1 و x_2 حيث $-1.6<x_1<-1.5$ و $1.5<x_2<1.6$.

بـ - أنشئ (Δ) و (C_f) .

6) لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=(ax+b)e^{x}$

أ - عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^{x}$ على $\mathbb{R}$.

بـ - إستنتج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.

التمرين «5» «بك2013» «م1» «6,5 ن»

x	$f(x)$
0,20	0,037
0,21	0,016
0,22	-0,005
0,23	-0,026
0,24	-0,048
0,25	-0,070

I) f الدالة المعرّفة على $]-\infty;1[$ بـ : $f(x)=\frac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}$.

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\overset{<}{\to}1} f(x)$ ، ثمّ استنتج المستقيمين المقاربين للمنحنى (C).

2) أحسب $f'(x)$. بيّن أنّ الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل في $]-\infty;1[$ حلا وحيدا α. باستعمال جدول القيم أعلاه جد حصرا للعدد α.

4) أرسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C)، ثمّ أرسم المنحنى (C') الممثل للدالة $|f|$.

5) عيّن بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)|=m$ حلان مختلفان في الإشارة.

II) g الدالة المعرّفة على $]-\infty;1[$ بـ: $g(x)=f(2x-1)$. (عبارة $g(x)$ غير مطلوبة)

1) أدرس تغيّرات الدالة g على $]-\infty;1[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

2) أ - تحقّق أنّ $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=0$ ، ثمّ بيّن أنّ : $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=2f'(\alpha)$.

ب - إستنتج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.

جـ - تحقّق من أنّ : $y=\frac{2}{(\alpha-1)^3}x-\frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T).

التمرين «6» «بك2015» «2ر» «6 ن»

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1-2x-e^{2x-2}$.

1) أدرس إتجاه تغيّر الدالة g على $\mathbb{R}$.

2) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$، ثمّ تحقّق أنّ: $0,36<\alpha<0,37$.

3) إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=xe^{2x+2}-x+1$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=e^{2x+2}g(-x)$.

ب - إستنتج أنّ الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-\alpha]$ و متزايدة تماما على $[-\alpha;+\infty[$.

2) أحسب نهاية f عند $+\infty$ و عند $-\infty$، ثم شكل جدول تغيّرات الدالة f .

3) أحسب $\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x-1]$ ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

4) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-x+1$.

5) أنشئ (Δ) و (C_f) على المجال $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ ، نأخذ $f(-\alpha)\approx 0,1$.

6) أ- تحقق أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $2f(x)+f'(x)-f''(x)=1-2x-3e^{2x+2}$.

ب - إستنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

التمرين «7» «بك 2016- الدورة الأولى -» «2ر» «7 ن»

I) لتكن g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+(x^2+x-1)e^{-x}$.

1) أحسب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

2) أدرس اتجاه تغيّر الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3) أ - بيّن أنّ للمعادلة $g(x)=0$ حلّين في $\mathbb{R}$ ، أحدهما معدوم و الآخر α حيث: $-1.52<\alpha<-1.51$.

بـ - استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=-x+(x^2+3x+2)e^{-x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب - بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f'(x)=-g(x)$.

جـ - شكّل جدول تغيّرات الدالة f على $\mathbb{R}$. (نأخذ $f(\alpha)\approx 0.38$)

د- عيّن دون حساب : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا .

2) أ- بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

ب - أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

جـ - بيّن أن المنحنى يقبل نقطتي إنعطاف يطلب تعيين إحداثييهما .

د - أرسم (Δ) و (C_f) على المجال $[-2;+\infty[$.

هـ - ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط m عدد و إشارة حلول المعادلة : $(m-x)e^x+(x^2+3x+2)=0$ على المجال $[-2;+\infty[$.

III) h و H الدالتان المعرّفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=x+f(x)$ و $H(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$.

1) عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث تكون الدالة H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$.

2) أ - أحسب التكامل التالي : $A(\lambda)=\int_0^{\lambda} h(x)dx$ ، حيث λ عدد حقيقي موجب تماما و فسّر النتيجة هندسيا .

ب - أحسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$.

التمرين «8» بك 2016 - الدورة الثانية - «2ر» «6 ن»

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=2e^x-x^2-x$.

1) أ- أحسب $g'(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، ثم أدرس إتجاه تغيّر الدالة g' (حيث g' هي مشتقة الدالة g)

ب - بيّن أنه ، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x)>0$

جـ - أحسب نهايتي الدالة g عند كل من $+\infty$ و عند $-\infty$ ، ثم شكّل جدول تغيّراتها .

2) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-1,38<\alpha<-1,37$.

3) إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x .

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^2e^x}{e^x-x}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب - بيّن أنّه ، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=\dfrac{xe^x g(x)}{(e^x-x)^2}$ (حيث f' هي مشتق الدالة f) .

جـ - أدرس اتجاه تغيّر الدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم شكّل جدول تغيّراتها .

2) أ- بيّن أن : $f(\alpha)=\alpha^2+2\alpha+2+\dfrac{2}{\alpha-1}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

ب - أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x^2\right]$ ، ثمّ فسّر النتيجة بيانيا .

جـ - أنشئ المنحنى (C_f) . (تعطى $f(\alpha)\approx 0,29$)

التمرين «9» بك 2017 - الدورة العادية - «2ر» «7 ن»

I) نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=2-x^2e^{1-x}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ و أعط تفسيرا هندسيا للنتيجة ، ثم أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) أ- بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=x(x-2)e^{1-x}$

بـ - أدرس اتجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3) أكتب معادلة لـ(T) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

II) h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=1-xe^{1-x}$.

1) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $h(x)\geq 0$ ، ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المماس (T) .

2) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0{,}7<\alpha<-0{,}6$.

3) أنشئ المماس (T) والمنحنى (C_f) على المجال $[-1;+\infty[$.

4) F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $F(x)=2x+(x^2+2x+2)e^{1-x}$.

- تحقق أن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم أحسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (C_f) ، حامل محور الفواصل و المستقيمين اللّذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=1$.

التمرين «10» بك 2017 - الدورة الإستثنائية - «م 1» «7 ن»

I) نعتبر الدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=x^2e^x-e$.

(C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الشكل)

- أحسب $g(1)$.
- بقراءة بيانية عيّن إشارة $g(x)$ ، ثم استنتج إشارة $g(-x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x .

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x)=e^{-x}-2-\dfrac{e}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب النهايات الآتية: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) بيّن أن المنحنى (γ) الذي معادلته $y=e^{-x}-2$ و المنحنى (C_f) متقاربان بجوار ، ثم أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (γ) .

3) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $f'(x)=\dfrac{-g(-x)}{x^2}$.

4) استنتج أن الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $[-1;0[$ و $]0;+\infty[$ متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1]$ ، ثم شكّل جدول تغيّراتها .

5) بيّن كيف يمكن إنشاء المنحنى (γ) إنطلاقا من منحنى الدالة $x\mapsto e^x$ ، ثم أرسم بعناية كلا من (γ) و (C_f) في نفس المعلم .

6) ليكن n عددا طبيعيا و $A(n)$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنيين (C_f) و (γ) و المستقيمين اللّذين معادلتيهما: $x=-e^n$ و $x=-e^{n+1}$.

أحسب العدد الحقيقي l حيث : $l=A(0)+A(1)+....+A(2016)$.

التمرين «11» بك 2018 «م 1» «7 ن»

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=2+(x-1)e^{-x}$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2) أدرس اتجاه تغيّر الدالة g ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل في حلا وحيدا α حيث $-0.38<\alpha<-0.37$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=2x+1-xe^{-x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1)أ- أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

ب - أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (2x+1)]$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا .

جـ - أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) حيث : $(\Delta): y = 2x+1$.

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $f'(x) = g(x)$ ، ثم استنتج اتجاه تغيّر الدالة f و شكّل جدول تغيّراتها .

3) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

4) أنشئ (Δ) ، (T) و المنحنى (C_f) (نأخذ $f(\alpha) \approx 0,8$).

5) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $x = (1-m)e^x$

6)أ- باستعمال المكاملة بالتجزئة عيّن دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^{-x}$ و التي تنعدم من أجل $x = 1$.

بـ- أحسب العدد A مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (C_f) والمستقيمات التي معادلاتهما: $x = 1$ ، $x = 3$ و $y = 2x+1$

التمرين 《12》《بك 2019》《1م》《7 ن》

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. تؤخذ وحدة الطول $2cm$.

(C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان للدالتين f و g المعرّفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$g(x) = e^x - ex \quad \text{و} \quad f(x) = e^x - \frac{1}{2}ex^2 .$$

1) أ - أدرس إتجاه تغيّر الدالة g .

بـ - إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة f .

3) أحسب كلا من $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة f .

4) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) على $\mathbb{R}$.

5) أرسم على المجال $[0;2]$ المنحنيين (C_f) و (C_g) في نفس المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$. (يعطى $e^2 - 2e \approx 2$)

6) أحسب بالسنتمتر مربع مساحة الحيز المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g).

7) h الدالة المعرّفة على المجال $[-2;2]$ كما يلي : $h(x) = \frac{1}{2}ex^2 - e^{|x|}$ و ليكن (Γ) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

أ - بيّن أن الدالة h زوجية .

بـ - من أجل $x \in [0;2]$ أحسب $h(x) + f(x)$ ثم استنتج كيفية رسم (Γ) إنطلاقا من (C_f) ثم أرسمه .

حل مقترح للتمرين(1)(باك 2008)

(I f الدالة العددية المعرّفة على $[-2;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=(ax+b)e^{-x}+1$

تعيين قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1;1)$ تنتمي إلى (C_f) و معامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$.

$A\in(C_f)$ معناه : $f(-1)=1$ أي : $(-a+b)e+1=1$ و منه : $a=b$.

معامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$ معناه : $f'(-1)=-e$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على $[-2;+\infty[$ و : $f'(x)=ae^{-x}+(-e^{-x})(ax+b)=(-ax-b+a)e^{-x}$.

و منه $f'(-1)=(2a-b)e$. و مما سبق $f'(-1)=-e$.

بالمطابقة لدينا $2a-b=-1$ و $a=b$ و منه نجد : $a=b=-1$.

(II الدالة g معرفة على المجال $[-2;+\infty[$ بـ : $g(x)=(-x-1)e^{-x}+1$.

1) تبيان أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x-1)e^{-x}+1=\lim\limits_{x\to+\infty}(-xe^{-x}-e^{-x}+1)=1$ ، لأن $\lim\limits_{u\to+\infty}(-xe^{-x})=\lim\limits_{u\to-\infty} ue^{u}=0$.

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب أفقي للمنحنى (C_g) عند $+\infty$.

2) دراسة تغيّرات الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $[-2;+\infty[$ ، و $g'(x)=-e^{-x}+(-e^{-x})(-x-1)=xe^{-x}$.

- إتجاه تغيّر الدالة g :

إشارة $g'(x)$ من إشارة x .

و منه : من أجل $x\in[-2;0]$ ، يكون $g'(x)\le 0$ و بالتالي الدالة g متناقصة على المجال $[-2;0]$.

من أجل $x\in[0;+\infty[$ ، يكون $g'(x)\ge 0$ و بالتالي الدالة g متزايدة على المجال $[0;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة g

x	-2		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	e^2+1	↘	0	↗	1

3) تبيان أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة إنعطاف I مع تعيين إحداثييها .

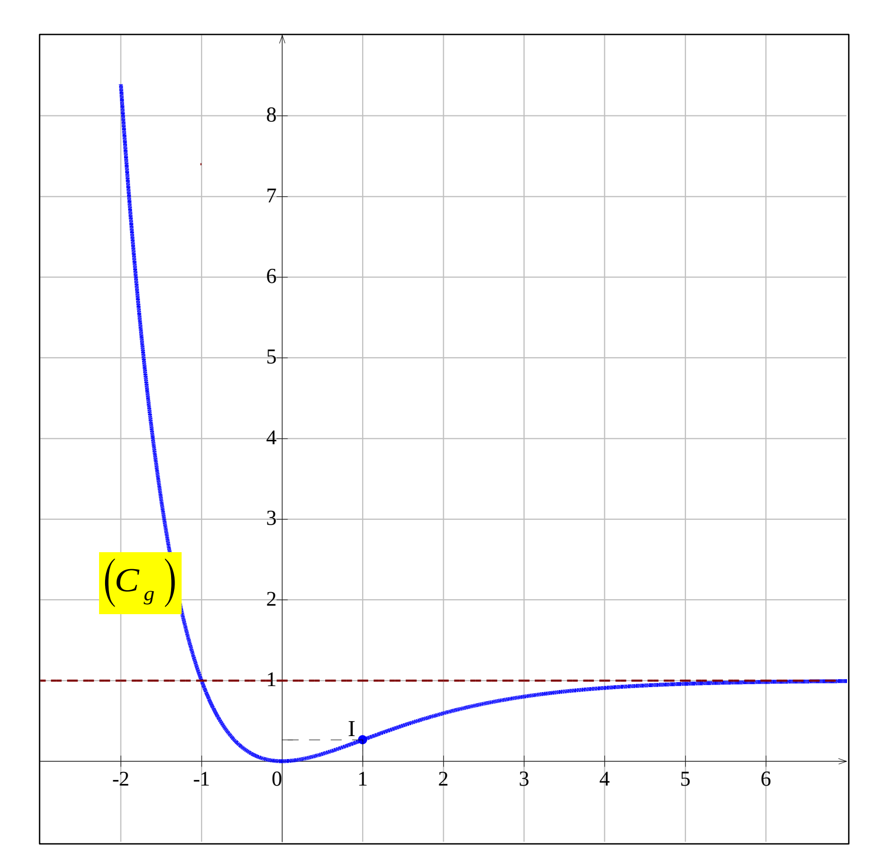
الدالة g' قابلة للإشتقاق على المجال $[-2;+\infty[$ ، و $g''(x)=(1-x)e^{-x}$.

إشارة $g''(x)$ من إشارة $1-x$ و بالتالي $g''(x)$ ينعدم عند 1 مغيّرا إشارته ، و منه $I\left(1;1-\dfrac{2}{e}\right)$ هي نقطة إنعطاف لـ (C_g) .

4) كتابة معادلة المماس (T) للمنحى (C_g) عند النقطة I.

لدينا : $(T): y=g'(1)(x-1)+g(1)$ و منه $(T): y=\dfrac{1}{e}x+1-\dfrac{3}{e}$.

5) الرسم :



6) H الدالة العددية المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي : $H(x)=(\alpha x+\beta)e^{-x}$ حيث α و β عددان حقيقيان .

- تعيين α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة : $x\mapsto g(x)-1$:

الدالة H قابلة للإشتقاق على المجال $]-2;+\infty[$ ، و $H'(x)=\alpha e^{-x}+\left(-e^{-x}\right)(\alpha x+\beta)=(-\alpha x-\beta+\alpha)e^{-x}$.

H دالة أصلية للدالة : $x\mapsto g(x)-1$ معناه : $(-\alpha x-\beta+\alpha)e^{-x}=(-x-1)e^{-x}$ و منه نجد : $\alpha=1$ و $\beta=2$.

لدينا: $g(x)=g(x)+1-1=H'(x)+1$ و منه الدالة الأصلية للدالة g من الشكل : $G(x)=H(x)+x+c$

الدالة الأصلية للدالة g و التي تنعدم عند 0 هي : $G(x)=(x+2)e^{-x}+x+2$.

III) لتكن k الدالة المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يأتي : $k(x)=g\left(x^2\right)$

الدالة k قابلة للإشتقاق على المجال $]-2;+\infty[$ لأنها مركب دالتين قابلتين للإشتقاق ،

و $k'(x)=2xg'\left(x^2\right)=2x\left(x^2e^{-x^2}\right)=2x^3e^{-x^2}$.

إتجاه تغيّر الدالة k :

إشارة $k'(x)$ من إشارة x .

و منه : من أجل $x\in[-2;0]$ ، يكون $k'(x)\leq 0$ و بالتالي الدالة k متناقصة على المجال $[-2;0]$.

من أجل $x\in[0;+\infty[$ ، يكون $k'(x)\geq 0$ و بالتالي الدالة k متزايدة على المجال $[0;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة :'

x	-2		0		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	0	$+$	
$k(x)$	$1-5e^{-4}$	↘	0	↗	1

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $f(x)=x-\dfrac{1}{e^x-1}$

1) أ- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x-\dfrac{1}{e^x-1}\right]=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-\dfrac{1}{e^x-1}\right]=+\infty$.

ب - $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\left[x-\dfrac{1}{e^x-1}\right]=-\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}\left[x-\dfrac{1}{e^x-1}\right]=+\infty$.

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (حامل محور التراتيب) مقارب للمنحنى (C_f) .

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة f :

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم : $f'(x)=1-\dfrac{-e^x}{(e^x-1)^2}=1+\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}$

و منه : من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم ، $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]0;+\infty[$ و $]-\infty;0[$.

جدول تغيّرات الدالة f

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow +\infty$

3) أ- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\dfrac{1}{e^x-1}\right]=0$ و منه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

و لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-\dfrac{1}{e^x-1}-1\right]=0$ و منه المستقيم (Δ') ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

ب - دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

لدينا : $f(x)-y=-\dfrac{1}{e^x-1}=\dfrac{1}{1-e^x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $1-e^x$.

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) تحت (Δ)

• دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ') .

لدينا : $f(x)-y=-\dfrac{1}{e^x-1}-1=\dfrac{e^x}{1-e^x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $1-e^x$.

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ')	(C_f) تحت (Δ')

4) إثبات أن النقطة $\omega\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) :

لدينا : من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ ، $-x\in\mathbb{R}^*$ و $f(-x)+f(x)=-\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{e^{-x}-1}=-\dfrac{1}{e^x-1}+\dfrac{e^x}{e^x-1}=1=2\times\dfrac{1}{2}$

و منه النقطة $\omega\left(0;\frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

5) أ- تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّين α و β حيث : $\ln 2<\alpha<1$ و $-1.4<\beta<-1.3$.

● الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ و $]\ln 2;1[\subset]0;+\infty[$ و $\begin{cases} f(1)\approx 0,41 \\ f(\ln 2)\approx -0,31 \end{cases}$ أي $f(1)\times f(\ln 2)<0$

و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]0;+\infty[$ حلا وحيدا α، حيث $\ln 2<\alpha<1$.

● الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;0[$ و $]-1,4;-1,3[\subset]-\infty;0[$ و $\begin{cases} f(-1.3)\approx 0,07 \\ f(-1.4)\approx -0,07 \end{cases}$

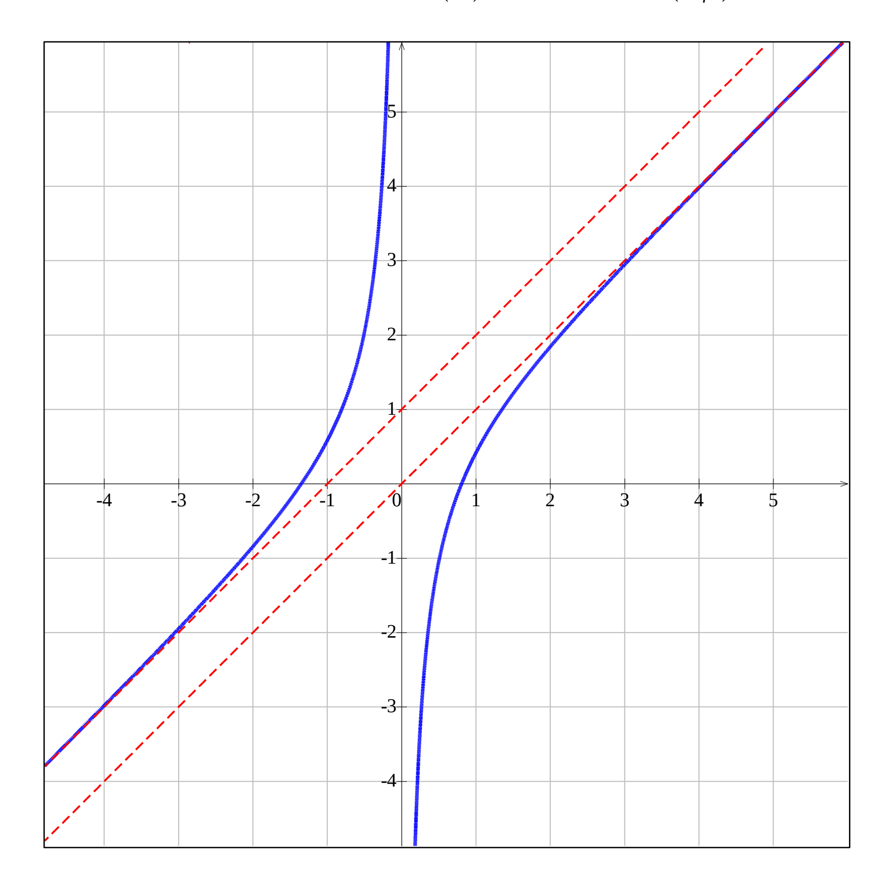
أي $f(-1,4)\times f(-1,3)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]-\infty;0[$ حلا وحيدا β، حيث $-1.4<\beta<-1.3$.

ب - دراسة وجود مماسات للمنحنى (C_f) توازي المستقيم (Δ) .

لنحل في $\mathbb{R}^*$ المعادلة : $f'(x)=1$.

لدينا : $f'(x)=1$ تكافئ $1+\frac{e^x}{(e^x-1)^2}=1$ تكافئ $\frac{e^x}{(e^x-1)^2}=0$ أي $e^x=0$ و هذا مستحيل و بالتالي المعادلة ليس لها حلول أي أنه لا توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ).

جـ - الرسم :



د - المناقشة البيانية :

لدينا : $(m-1)e^{-x}=m$ تكافئ $m-1=me^x$ تكافئ $m=-\frac{1}{e^x-1}$ تكافئ $m+x=x-\frac{1}{e^x-1}$ تكافئ $f(x)=x+m$ ، و منه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y=x+m$.

إذا كان $m\in]-\infty;0[$ فإن للمعادلة حل واحد موجب .

إذا كان $m\in[0;1]$ فإن المعادلة ليس لها حلول .

إذا كان $m \in]1;+\infty[$ فإن للمعادلة حل واحد سالب .

حل مقترح للتمرين(3)(باك 2011)

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بِـ: $f(x)=e^{x}-ex-1$.

1) أ ـ حساب النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{x}-ex-1\right)=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{x}-ex-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{e^{x}}{x}-e-\frac{1}{x}\right)\right]=+\infty$$

.

بـ ـ حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=e^{x}-e$

$f'(x)=0$ تكافئ $e^{x}-e=0$ تكافئ $e^{x}=e$ تكافئ $x=1$.

من أجل $x\in]-\infty;1]$ ، يكون $e^{x}\leq e$ أي $f'(x)\leq 0$ و بالتالي الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty;1]$.

من أجل $x\in[1;+\infty[$ ، يكون $e^{x}\geq e$ أي $f'(x)\geq 0$ و بالتالي الدالة f متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

جـ ـ جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

2) أ - لدينا : $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-ex-1)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[e^{x}-ex-1-(-ex-1)\right]=\lim_{x\to-\infty}e^{x}=0$.

و منه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-ex-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

بـ ـ كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

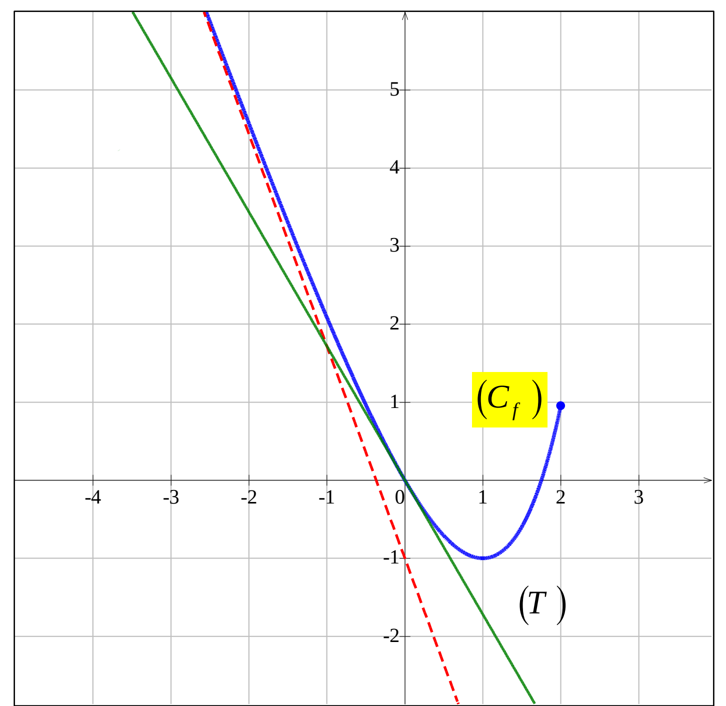
لدينا: $(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)$ و منه $(T): y=(1-e)x$.

جـ ـ تبيان أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]1,75;1,76[$ حلا وحيدا α.

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$ و $]1,75;1,76[\subset[1;+\infty[$ و $\begin{cases} f(1.75)\approx -0,002 \\ f(1.76)\approx 0,02 \end{cases}$

أي $f(1,75)\times f(1,76)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.75<\alpha<1.76$.

د ـ الرسم :





3) أ ـ حساب ، بدلالة α ، المساحة $A(\alpha)$ للحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (C_f) ، حامل محور الفواصل و المستقيمين اللّذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=\alpha$.

$$A(\alpha)=-\int_0^{\alpha} f(x)dx=-\int_0^{\alpha}(e^x-ex-1)dx=-\left[e^x-\frac{1}{2}ex^2-x\right]_0^{\alpha}=1-\left(e^{\alpha}-\frac{1}{2}e\alpha^2-\alpha\right)$$

بـ ـ إثبات أنّ : $A(\alpha)=\left(\frac{1}{2}e\alpha^2-e\alpha+\alpha\right)ua$

لدينا : $f(\alpha)=0$ و منه $e^{\alpha}-e\alpha-1=0$ أي $e^{\alpha}=e\alpha+1$ و بالتالي :

$$A(\alpha)=-e^{\alpha}+\frac{1}{2}e\alpha^2+\alpha+1=-(e\alpha+1)+\frac{1}{2}e\alpha^2+\alpha+1=\left(\frac{1}{2}e\alpha^2-e\alpha+\alpha\right)ua$$

(ua هي وحدة المساحات)

حل مقترح للتمرين(4)(باك 2012)

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $g(x)=1-xe^x$.

1) حساب النهايات : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(1-xe^x)=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(1-xe^x)=-\infty$.

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x)=-1\times e^x+(-x)e^x=-(x+1)e^x$

بما أن $e^x>0$ فإن إشارة $g'(x)$ من إشارة $-(x+1)$ ، و منه :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$

و بالتالي الدالة g متناقصة على المجال $]-1;+\infty[$ و متزايدة على المجال $]-\infty;-1]$.

جدول تغيّرات الدالة g :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	1 ↗	$1+e^{-1}$	↘ $-\infty$

3) أ ـ تبيان أنّ المعادلة $g(x)=0$ ، تقبل في حلا وحيدا α على المجال $]-1;+\infty[$:

الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-1;+\infty[$ و $\begin{cases} g(-1)=1+e^{-1} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty \end{cases}$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$.

بـ ـ التحقق أنّ $0.5<\alpha<0.6$:

لدينا : $]0,5;0,6[\subset[-1;+\infty[$ و $\begin{cases} g(0.5)\approx 0,18 \\ g(0.6)\approx -0,09 \end{cases}$ و منه $0.5<\alpha<0.6$.

إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;2]$ كما يلي : $f(x)=(x-1)e^x-x-1$.

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x-1)e^x-x-1\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[xe^x-e^x-x-1\right]=+\infty$.

2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;2]$ فإن : $f'(x)=-g(x)$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty;2]$ و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;2]$:

$$f'(x)=1\times e^{x}+(x-1)e^{x}-1=e^{x}+xe^{x}-e^{x}-1=xe^{x}-1=-\left(1-xe^{x}\right)=-g(x)$$

إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty;2]$:

x	$-\infty$		α		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

جدول تغيّر ات الدالة :

x	$-\infty$		α		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$e^{2}-3$

3) تبيان أن : $f(\alpha)=-\left(\dfrac{\alpha^{2}+1}{\alpha}\right)$.

لدينا : $f(\alpha)=(\alpha-1)e^{\alpha}-\alpha-1$ ، و لدينا من جهة $g(\alpha)=0$ يكافئ $1-\alpha e^{\alpha}=0$ يكافئ $e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$.

و منه $f(\alpha)=\dfrac{(\alpha-1)}{\alpha}-\alpha-1=\dfrac{(\alpha-1)-\alpha^{2}-\alpha}{\alpha}=\dfrac{-\alpha^{2}-1}{\alpha}$ أي : $f(\alpha)=-\left(\dfrac{\alpha^{2}+1}{\alpha}\right)$.

إيجاد حصر للعدد $f(\alpha)$:

$0,5<\alpha<0,6$ يكافئ $\begin{cases}\dfrac{1}{0,6}<\dfrac{1}{\alpha}<\dfrac{1}{0,5}\\ 1,25<\alpha^{2}+1<1,36\end{cases}$ يكافئ $\dfrac{1,25}{0,6}<\dfrac{\alpha^{2}+1}{\alpha}<\dfrac{1,36}{0,5}$

يكافئ $-\dfrac{1,25}{0,6}>-\left(\dfrac{\alpha^{2}+1}{\alpha}\right)>-\dfrac{1,36}{0,5}$ أي : $-2,72<f(\alpha)<-2,08$.

4) أ ـ لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x-1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x-1)e^{x}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^{x}-e^{x}\right)=0$

و منه المستقيم (Δ)ذا المعادلة $y=-x-1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

بـ ـ دراسة وضعية (C_f) بالنسبية إلى (Δ) :

لدينا : $f(x)-y=(x-1)e^{x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $x-1$ على المجال $]-\infty;2]$.

x	$-\infty$		1		2
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;-2)$	(C_f) فوق (Δ)	

5) أ ـ تبيان أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث $-1.6<x_1<-1.5$ و $1.5<x_2<1.6$.

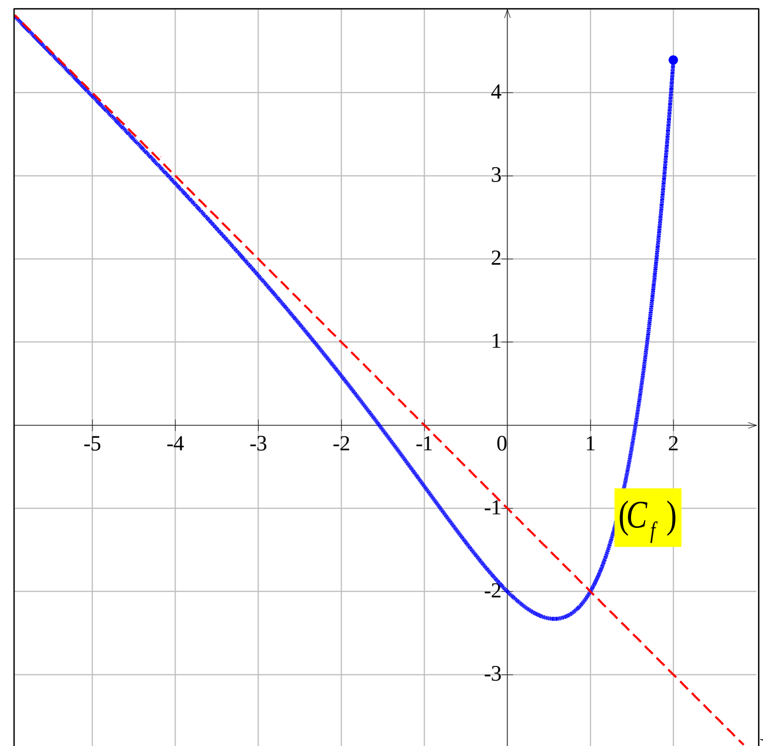
- الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$ و $]-1,6;-1,5[\subset]-\infty;\alpha]$ و $\begin{cases}f(-1.5)\approx-0,05\\ f(-1.6)\approx0,07\end{cases}$

أي $f(-1,6)\times f(-1,5)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي x_1 حيث $-1.6<x_1<-1.5$ و يحقق $f(x_1)=0$.

- الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[\alpha;2]$ و $]1,5;1,6[\subset[\alpha;2]$ و $\begin{cases}f(1.5)\approx-0,26\\ f(1.6)\approx0,37\end{cases}$

أي $f(1,5)\times f(1,6)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي x_2 حيث $1.5<x_2<1.6$ و يحقق $f(x_2)=0$.

بـ ـ الرسم :



6) لتكن h الدالة المعر

أ ـ تعيين العددين الحقيقين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$.

الدالة h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $h'(x)=ae^x+(ax+b)e^x=(ax+a+b)e^x$.

الدالة h أصلية للدالة $x \mapsto xe^x$ يعني : $h'(x)=xe^x$ ، و منه بالمطابقة نجد : $a=1$ و $b=-1$. أي $h(x)=(x-1)e^x$.

بـ ـ إستنتاج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$:

لدينا : $g(x)=1-xe^x$ و منه دالة أصلية للدالة g من الشكل : $G(x)=x-(x-1)e^x$.

حل مقترح للتمرين (5) (باك 2013)

I) f الدالة المعرّفة على $]-\infty;1[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}$.

1) حساب النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}\right]=2$$ ، لأن : $$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{\frac{1}{x-1}}\right)=1\end{cases}$$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب أفقي للمنحنى (C).

$$\lim_{\substack{x\to1\\<}} f(x)=\lim_{\substack{x\to1\\<}}\left[\frac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}\right]=-\infty$$ ، لأن : $$\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=-\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}\left(e^{\frac{1}{x-1}}\right)=0\end{cases}$$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مقارب عمودي للمنحنى (C).

2) حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty;1[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;1[$:

$$f'(x)=\frac{1\times(x-1)-1\times x}{(x-1)^2}+\left(\frac{-1}{(x-1)^2}\right)e^{\frac{1}{x-1}}=\frac{-1}{(x-1)^2}\times\left(1+e^{\frac{1}{x-1}}\right)$$

بما أن $f'(x)<0$ من أجل كل $x\in]-\infty;1[$ ، فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ 1
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↘ 2

3) تبيان أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]-\infty;1[$ حلا وحيدا α.

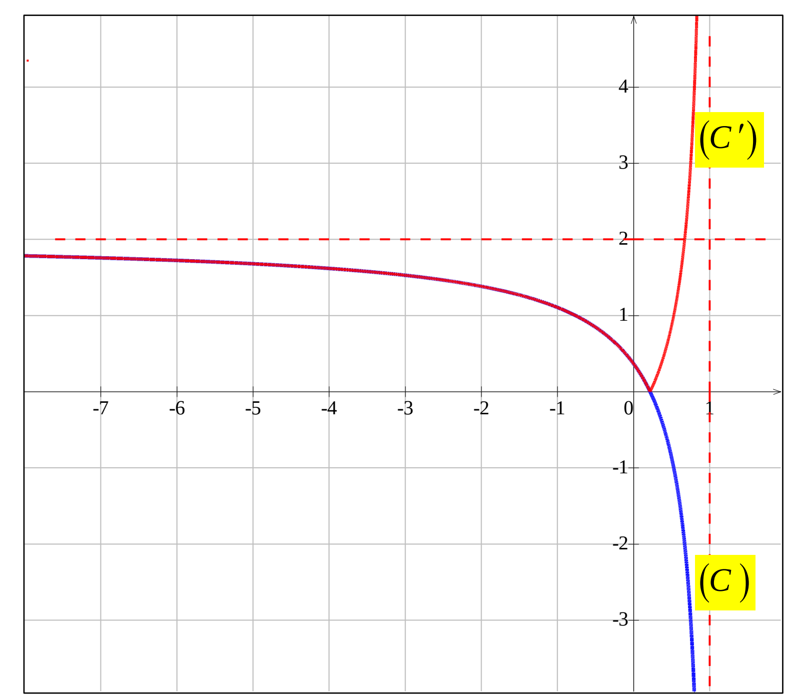
الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$ و $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2\\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} f(x)=-\infty\end{cases}$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]-\infty;1[$ حلا وحيدا α.

حسب جدول القيم : $0,21<\alpha<0,22$.



4) الرسم :



5) تعيين مجموعة قيم الاعداد الحقيقية m التي من اجلها يكون للمعادله $|f(x)|=m$ حلان مختلفان في الإشارة.

حلول المعادلة $|f(x)|=m$ بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C') مع المستقيم ذي المعادلة $y=m$.

من أجل $m\in\left]\frac{1}{e};2\right[$ المعادلة $|f(x)|=m$ تقبل حلين مختلفين في الإشارة .

II) g الدالة المعرّفة على $]-\infty;1[$ بـِ: $g(x)=f(2x-1)$.

1) دراسة تغيّرات الدالة g :

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(2x-1)=2$ و $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} f(2x-1)=-\infty$

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty;1[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;1[$: $g'(x)=2f'(2x-1)$

بما أنه من أجل كل $x\in]-\infty;1[$ ، $(2x-1)\in]-\infty;1[$ فإن $f'(2x-1)<0$ ، و بالتالي الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$.

جدول تغيّرات الدالة g :

x	$-\infty$ $\qquad$ 1
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	2 ↘ $-\infty$

2) أ - التحقّق أنّ $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=0$:

لدينا : $g(x)=f(2x-1)$ و منه $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=f\left(2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)-1\right)=f(\alpha)=0$.

تبيان أنّ : $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=2f'(\alpha)$.

لدينا : $g'(x)=2f'(2x-1)$ و منه $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=2f'\left(2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)-1\right)=2f'(\alpha)$.

بـ - إستنتاج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.

لدينا : $(T):y=g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\left(x-\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\right)+g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$ و منه $(T):y=2f'(\alpha)\left(x-\frac{\alpha+1}{2}\right)$.

جـ - التحقّق من أنّ : $y=\frac{2}{(\alpha-1)^3}x-\frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T) .

لدينا : $f'(\alpha)=\frac{-1}{(\alpha-1)^2}\times\left(1+e^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)$ ، لكن $f(\alpha)=0$ و هذا يعني $e^{\frac{1}{\alpha-1}}=-\frac{\alpha}{\alpha-1}$ و منه $f'(\alpha)=\frac{1}{(\alpha-1)^3}$

إذن : $(T):y=\frac{2}{(\alpha-1)^3}\left(x-\frac{\alpha+1}{2}\right)$ أي $(T):y=\frac{2}{(\alpha-1)^3}x-\frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$.

حل مقترح للتمرين(6)(باك 2015)

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=1-2x-e^{2x-2}$.

1) دراسة إتجاه تغيّر الدالة g على $\mathbb{R}$:

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x)=-2-2e^{2x-2}=-2\left(1+2e^{2x-2}\right)$.

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x)<0$ و بالتالي الدالة g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

2) تبيان أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$:

الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ و
$$\begin{cases}\lim_{x\to-\infty}g(x)=+\infty\\ \lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}(2x-2)\left(\frac{1-2x}{2x-2}-\frac{e^{2x-2}}{2x-2}\right)=-\infty\end{cases}$$

و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$.

التحقّق أنّ : $0,36<\alpha<0,37$.

لدينا : $\begin{cases}g(0.36)\approx 0,002\\ g(0.37)\approx -0,02\end{cases}$ أي : $g(0.36)\times g(0.37)<0$ و منه $0,36<\alpha<0,37$.

3) إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = xe^{2x+2} - x + 1$.

1) أ- تبيان أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = e^{2x+2}g(-x)$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x) = e^{2x+2} + 2xe^{2x+2} - 1 = e^{2x+2}\left(1 + 2x - e^{-2x-2}\right) = e^{2x+2}\left(1 - 2(-x) - e^{2(-x)-2}\right) = e^{2x+2}g(-x)$$

بـ - إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(-x)$:

x	$-\infty$		$-\alpha$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

نستنتج أنّ الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty;-\alpha]$ و متزايدة على $[-\alpha;+\infty[$.

2) حساب النهايات :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(xe^{2x+2} - x + 1\right) = +\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(xe^{2x+2}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2}e^{2} \times 2xe^{2x}\right) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(xe^{2x+2} - x + 1\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(e^{2x+2} - 1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		$-\alpha$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(-\alpha)$	↗	$+\infty$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) + x - 1] = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(xe^{2x+2}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2}e^{2} \times 2xe^{2x}\right) = 0$

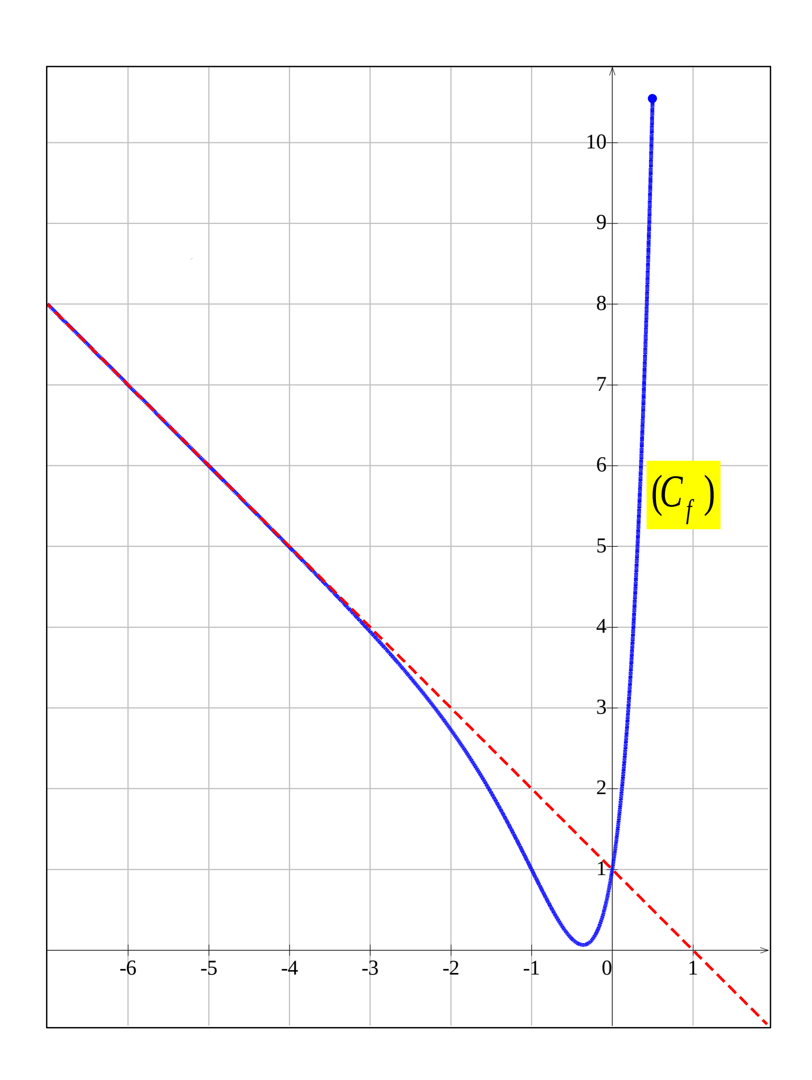
التفسير الهندسي : المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = -x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

4) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

لدينا : $f(x) - (-x + 1) = xe^{2x+2}$ و منه إشارة الفرق من إشارة x .

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) - y$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0;1)$	(C_f) فوق (Δ)	

5) الرسم :



6) أ- التحقق : من أجل كل عدد حقيقي x :

$$2f(x)+f'(x)-f''(x)=2xe^{2x+2}-2x+2+e^{2x+2}+2xe^{2x+2}-1-(4x+4)e^{2x+2}=1-2x-3e^{2x+2}$$

بـ - إستنتاج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

لدينا : من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $2f(x)+f'(x)-f''(x)=1-2x-3e^{2x+2}$.

و منه $f(x)=-\frac{1}{2}f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{2}-x-\frac{3}{2}e^{2x+2}$.

و بالتالي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ من الشكل : $F(x)=\frac{1}{2}\left[-f(x)+f'(x)+x-x^2-\frac{3}{2}e^{2x+2}\right]+c$

أي : $F(x)=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{2x+2}-\frac{1}{2}x^2+x-1+c$.

حل مقترح للتمرين(7)(باك 2016 – الدورة الأولى -)

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=1+(x^2+x-1)e^{-x}$.

1) حساب النهايات :

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[1+(x^2+x-1)e^{-x}\right]=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[1+(x^2+x-1)e^{-x}\right]=1$.

2) دراسة اتجاه تغيّر الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

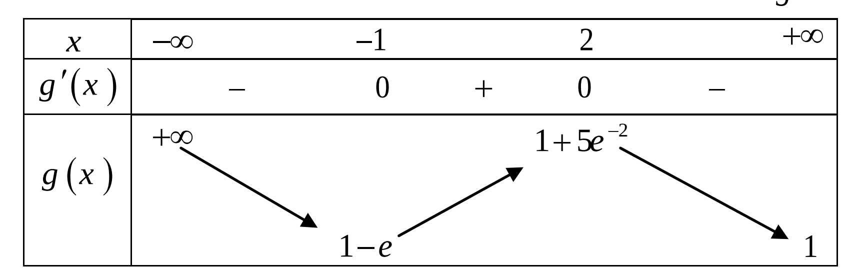
$$g'(x)=(2x+1)e^{-x}-(x^2+x-1)e^{-x}=(-x^2+x+2)e^{-x}=(2-x)(x+1)e^{-x}$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $(2-x)(x+1)$:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

الدالة g متزايدة على المجال $[-1;2]$ و متناقصة على كل من المجالين $[2;+\infty[$ و $]-\infty;-1]$.

جدول تغيّرات الدالة g :



x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$ ↘		$1-e$	↗	$1+5e^{-2}$	↘	1

3) أ - تبيان انّ للمعادلة $g(x)=0$ حلين في $\mathbb{R}$ ، احدهما معدوم و الاخر α حيث : $-1.52<\alpha<-1.51$.

لدينا : $g(0)=1+(0^2+0-1)e^0=1-1=0$

الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1]$ و $]-1,52;-1,51[\subset]-\infty;-1]$ و $\begin{cases} g(-1,52)\approx 0,041 \\ g(-1,51)\approx -0,040 \end{cases}$

أي $g(-1,52)\times g(-1,51)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $]-\infty;-1]$ حلا وحيدا α حيث : $-1.52<\alpha<-1.51$.

بـ - إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=-x+(x^2+3x+2)e^{-x}$.

1) أ- حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x+(x^2+3x+2)e^{-x}\right]=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-x+(x^2+3x+2)e^{-x}\right]=-\infty$

بـ - الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$f'(x)=-1+(2x+3)e^{-x}-(x^2+3x+2)e^{-x}=-1-(x^2+x-1)e^{-x}=-g(x)$.

جـ - جدول تغيّرات الدالة f :

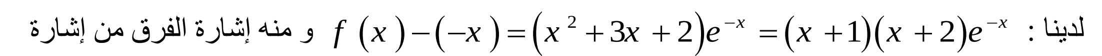
x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘		$f(\alpha)$	↗	2	↘	$-\infty$

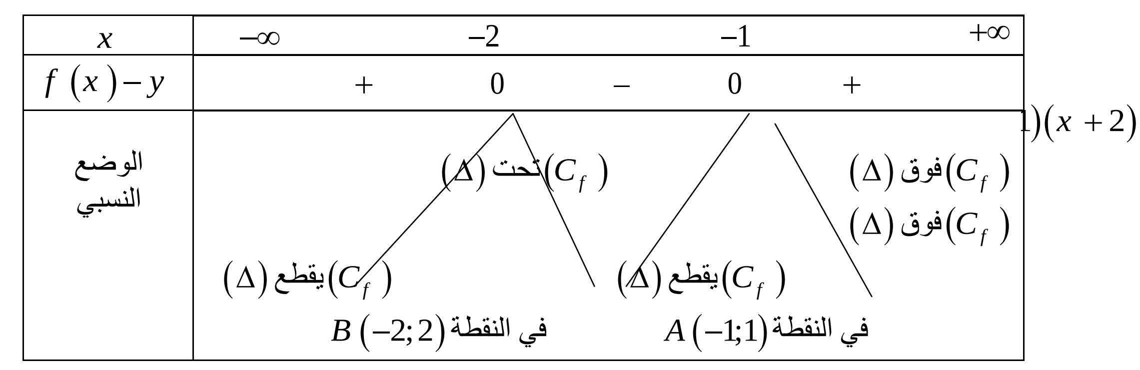
د- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}=f'(\alpha)=-g(\alpha)=0$.

التفسير الهندسي : المنحنى (C_f) يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة α معامل توجيهه معدوم . (يوازي لحامل محور الفواصل).

2) أ - $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-x)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+3x+2)e^{-x}=0$ و منه المستقيم (Δ)ذو المعادلة $y=-x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

بـ - دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) :


لدينا : $f(x)-(-x)=(x^2+3x+2)e^{-x}=(x+1)(x+2)e^{-x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $(x+1)(x+2)$



x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي			(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $B(-2;2)$	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(-1;1)$	(C_f) فوق (Δ) (C_f) فوق (Δ)	

جـ - تبيان أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف :

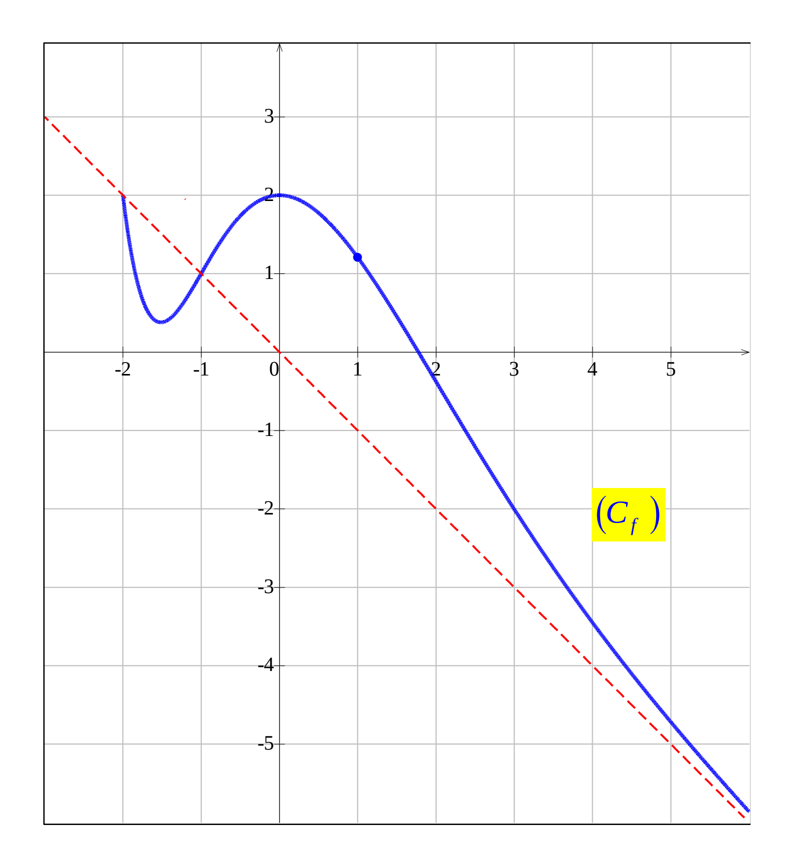
لدينا : الدالة f' قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $f''(x)=-g'(x)=(x-2)(x+1)e^{-x}$.

إشارة $f''(x)$:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

و منه المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف هما : $A(-1;1)$ و $C(2;-2+12e^{-2})$.

د - الرسم :



هـ - المناقشة البيانية :

المعادلة $(m-x)e^{x}+(x^2+3x+2)=0$ تكافئ $f(x)=-m$.

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=-m$.

لما $m\in]-f(\alpha);+\infty[$ يكون $-m\in]-\infty;f(\alpha)[$ و المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا .

لما $m=-f(\alpha)$ المعادلة تقبل حلّين أحدهما موجب و الآخر سالب .

لما $m\in]-2;-f(\alpha)[$ يكون $-m\in]f(\alpha);2[$ و المعادلة تقبل ثلاثة حلول ، إثنان سالبان و الآخر موجب .

لما $m=-2$ المعادلة تقبل حلّين أحدهما سالب و الآخر معدوم .

III) h و H الدالتان المعرّفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=x+f(x)=(x^2+2x+3)e^{-x}$ و $H(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$.

1) تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث تكون الدالة H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$:

H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$ يعني : من أجل كل عدد حقيقي x ، $H'(x)=h(x)$.

الدالة H قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$H'(x)=(2ax+b)e^{-x}-(ax^2+bx+c)e^{-x}=(-ax^2+(2a-b)x+b-c)e^{-x}$$

و منه بالمطابقة نجد : $a=-1$ ، $b=-5$ و $c=-7$ أي $H(x)=(-x^2-5x-7)e^{-x}$.

2) أ - حساب التكامل : $A(\lambda)=\int_0^{\lambda} h(x)dx$ ، حيث $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$.

$$A(\lambda)=\int_0^{\lambda} h(x)dx=[H(x)]_0^{\lambda}=(-\lambda^2-5\lambda-7)e^{-\lambda}+7$$

التفسير الهندسي :

$A(\lambda)$ يمثل مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) ، المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x$ و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=0$ و $x=\lambda$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$.

ب - $\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)=\lim_{\lambda\to+\infty}\left[(-\lambda^2-5\lambda-7)e^{-\lambda}+7\right]=7$.

حل مقترح للتمرين(8)(باك 2016 – الدورة الثانية -)

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=2e^x-x^2-x$.

1) أ- الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x)=2e^x-2x-1$

دراسة إتجاه تغيّر الدالة g' :

الدالة g' قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $g''(x)=2e^x-2=2(e^x-1)$

إشارة $g''(x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g''(x)$	$-$	0	$+$

الدالة g' متناقصة على المجال $]-\infty;0]$ و متزايدة على المجال $[0;+\infty[$.

ب - تبيان أنه ، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x)>0$

الدالة g' تقبل قيمة حدّية صغرى على $\mathbb{R}$ هي $g'(0)=1$ و منه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x)>0$

جـ - $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}(2e^x-x^2-x)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{2e^x}{x^2}-1-\frac{1}{x^2}\right)=+\infty$

جدول تغيّرات الدالة g :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2) تبيان أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-1{,}38<\alpha<-1{,}37$.

الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و $\begin{cases} g(-1{,}38)\approx-0{,}02 \\ g(-1{,}37)\approx 0{,}001 \end{cases}$ أي $g(-1{,}38)\times g(-1{,}37)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-1{,}38<\alpha<-1{,}37$.

3) إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^2e^x}{e^x-x}$.

1) أ- حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2e^x}{e^x-x}\right)=0$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2e^x\right)=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-x\right)=+\infty\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2e^x}{e^x-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{1-xe^{-x}}\right)=+\infty$.

بـ - الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x:

$$f'(x)=\frac{\left(2xe^x+x^2e^x\right)\left(e^x-x\right)-\left(e^x-1\right)x^2e^x}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{xe^x\left[(2+x)\left(e^x-x\right)-x\left(e^x-1\right)\right]}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{xe^xg(x)}{\left(e^x-x\right)^2}$$

جـ - دراسة اتجاه تغيّر الدالة f على $\mathbb{R}$:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x.g(x)$:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الدالة f متناقصة على المجال $[\alpha;0]$ و متزايدة على كل من المجالين $[0;+\infty[$ و $]-\infty;\alpha]$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	0	↗	$+\infty$

2) أ- تبيان أن : $f(\alpha)=\alpha^2+2\alpha+2+\dfrac{2}{\alpha-1}$

لدينا : $g(\alpha)=0$ أي $e^\alpha=\dfrac{\alpha^2-\alpha}{2}$ و منه

$$f(\alpha)=\frac{\alpha^2e^\alpha}{e^\alpha-\alpha}=\frac{\alpha^2\left(\dfrac{\alpha^2+\alpha}{2}\right)}{\dfrac{\alpha^2+\alpha}{2}-\alpha}=\frac{\alpha^2\left(\alpha^2+\alpha\right)}{\alpha^2-\alpha}=\frac{\alpha^3+\alpha^2}{\alpha-1}$$

أي : $f(\alpha)=\alpha^2+2\alpha+2+\dfrac{2}{\alpha-1}$.

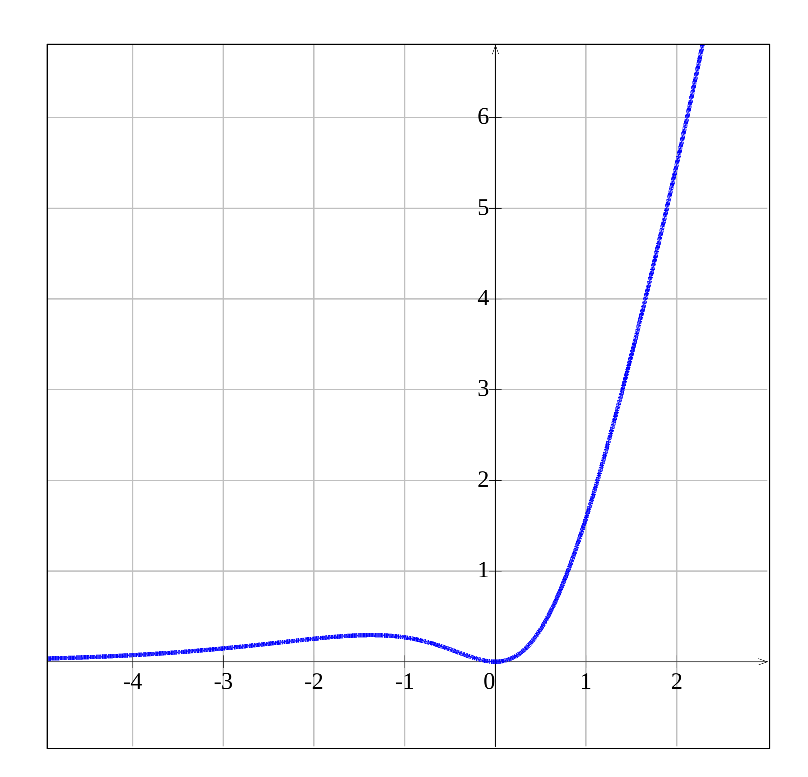
إستنتاج حصر للعدد $f(\alpha)$.

لدينا : $-1{,}38<\alpha<-1{,}37$ يكافئ $\begin{cases}-0{,}76<2\alpha+2<-0{,}74\\ (-1{,}37)^2<\alpha^2<(-1{,}38)^2\\ -2{,}38<\alpha-1<-2{,}37\\ -\dfrac{2}{2{,}37}<\dfrac{2}{\alpha-1}<-\dfrac{2}{2{,}38}\end{cases}$ و منه $0{,}27<f(\alpha)<0{,}32$.

بـ - $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x^2\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^2e^x}{e^x-x}-x^2\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3}{e^x-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x^3}-\dfrac{1}{x^2}}\right)=0$

التفسير البياني : المنحنى (C_f) و المنحنى الممثل للدالة "مربع" $(x\mapsto x^2)$ متقاربان عند $+\infty$.

جـ - الرسم :



حل مقترح للتمرين(9)(باك 2017 – الدورة العادية -)

I) نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=2-x^2e^{1-x}$.

1) تبيان أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-x^2e^{1-x}\right)=2$ لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{1-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e\times x^2e^{-x}\right)=0$.

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $y=2$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-x^2e^{1-x}\right)=-\infty$.

2) أ- الدالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ،

$f'(x)=-2xe^{1-x}+x^2e^{1-x}=\left(x^2-2x\right)e^{1-x}=x(x-2)e^{1-x}$

بـ - دراسة اتجاه تغيّر الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x(x-2)$:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الدالة f متناقصة على المجال $[0;2]$ و متزايدة على كل من المجالين $[2;+\infty[$ و $]-\infty;0]$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	$2-4e^{-1}$	↗	2

3) كتابة معادلة لـ (T) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 :

لدينا : $(T):y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و منه $(T):y=-x+2$.

II) h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=1-xe^{1-x}$.

1) تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $h(x)\geq 0$:

الدالة h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $h'(x)=-e^{1-x}+xe^{1-x}=(x-1)e^{1-x}$

إشارة $h'(x)$:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	

الدالة h متناقصة على المجال $]-\infty;1]$ و متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

الدالة h تقبل قيمة حدّية صغرى على $\mathbb{R}$ هي 0 $h(1)=0$ و منه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $h(x)\geq 0$

• دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المماس (T):

لدينا : $f(x)-y=2-x^2e^{1-x}+x-2=x(1-x)e^{1-x}=xh(x)$.

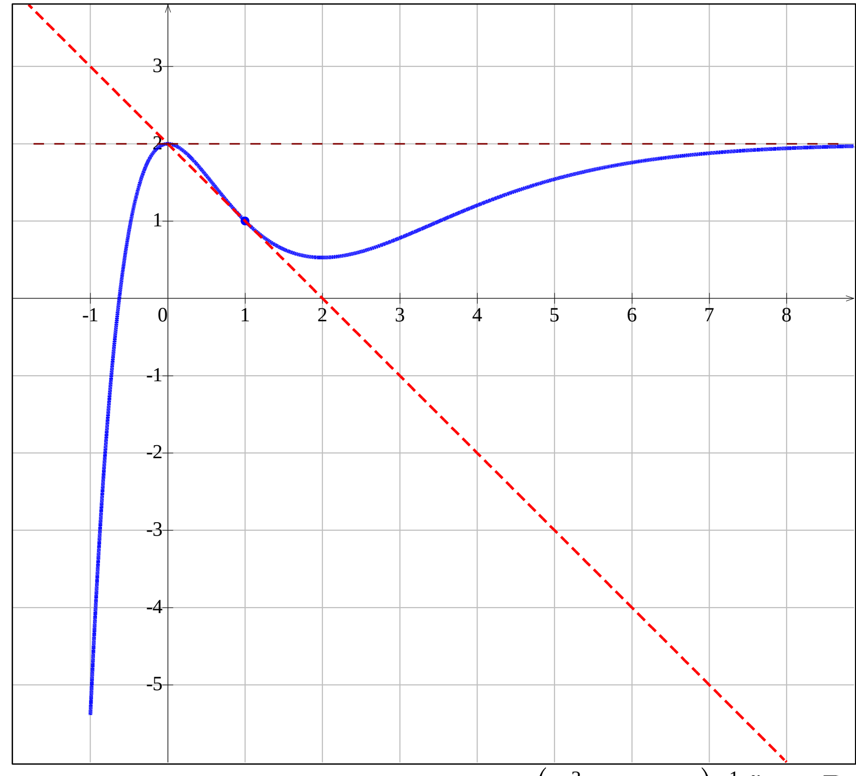
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) تحت (T)	(C_f) يقطع (T)	(C_f) فوق (T)	(C_f) يقطع (T)	(C_f) فوق (T)	

2) تبيان أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,7<\alpha<-0,6$.

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;0[$ و $]-0,7;-0,6[\subset]-\infty;0[$ و $\begin{cases} f(-0,7)\approx -0,7 \\ f(-0,6)\approx 0,2 \end{cases}$

أي $f(-0,7)\times f(-0,6)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,7<\alpha<-0,6$.

3) الرسم :



4) F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$بـ : $F(x)=2x+(x^2+2x+2)e^{1-x}$.

- التحقق أن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$:

الدالة F قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$$F'(x)=2+(2x+2)e^{1-x}-(x^2+2x+2)e^{1-x}=2-x^2e^{1-x}=f(x)$$

- حساب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) ، حامل محور الفواصل و المستقيمين اللّذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=1$.

$$S=\int_0^1 f(x)dx=\left[F(x)\right]_0^1=F(1)-F(0)=(7-2e)u.a$$

حل مقترح للتمرين(10)(باك 2017 – الدورة الإستثنائية -)

I) نعتبر الدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=x^2e^x-e$.

- $g(1)=e^1-e=0$.
- إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

- إشارة $g(-x)$:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g(-x)$		$+$	0	$-$	

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x)=e^{-x}-2-\frac{e}{x}$.

1) حساب النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{-x}-2-\frac{e}{x}\right)=+\infty \quad ، \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x}-2-\frac{e}{x}\right)=-2$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\<}} f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\<}}\left(e^{-x}-2-\frac{e}{x}\right)=+\infty \quad ، \quad \lim_{\substack{x\to0\\>}} f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\>}}\left(e^{-x}-2-\frac{e}{x}\right)=-\infty$$

2) لدينا : $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-y\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{e}{x}\right)=0$ و منه (C_f) و المنحنى (γ) ذي المعادلة $y=e^{-x}-2$ متقاربان عند $-\infty$.

دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (γ):

لدينا : $f(x)-y=-\frac{e}{x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $-x$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	‖	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (γ)	‖	(C_f) تحت (γ)

3) تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $f'(x)=\frac{-g(-x)}{x^2}$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم :

$$f'(x)=-e^{-x}+\frac{e}{x^2}=\frac{-x^2e^{-x}+e}{x^2}=\frac{-\left(x^2e^{-x}-e\right)}{x^2}=\frac{-g(-x)}{x^2}$$

إتجاه تغيّر الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(-x)$:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	

و منه الدالة f متزايدة على كل من المجالين $]-1;0[$ و $]0;+\infty[$ متناقصة على المجال $]-\infty;-1[$.

جدول تغيّرات الدالة f :

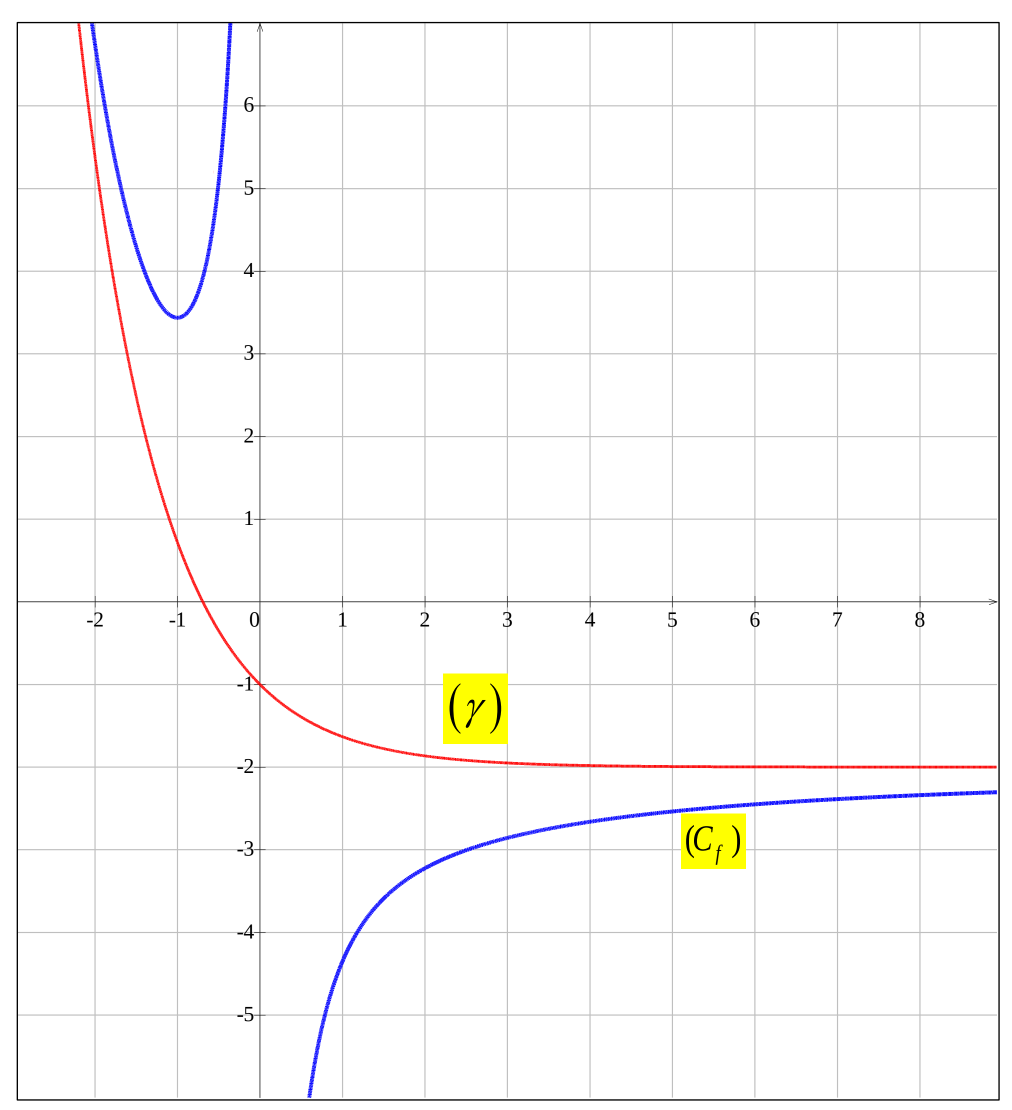
x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$g(x)$	$+\infty$ ↘		$2e-2$	↗ $+\infty$	‖ $+\infty$	↗	$-\infty$

4) شرح كيفية إنشاء المنحنى (γ) إنطلاقا من منحنى الدالة $x \mapsto e^{x}$:

لدينا : (γ) المنحنى ذي المعادلة $y = e^{-x} - 2$

و منه (γ) هو صورة (Γ) منحنى الدالة $x \mapsto e^{-x}$ بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(0;-2)$ ، علما أن (Γ) هو نظير منحنى الدالة $x \mapsto e^{x}$ بالنسبة لحامل محور التراتيب .

الرسم :



5) n عدد طبيعي و $A(n)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (γ) و المستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = -e^{n}$ و $x = -e^{n+1}$.

$$A(n) = \int_{-e^{n+1}}^{-e^{n}} \left[f(x) - e^{-x} + 2\right]dx = \int_{-e^{n+1}}^{-e^{n}} \left(-\frac{e}{x}\right)dx = -e\int_{-e^{n+1}}^{-e^{n}} \left(\frac{1}{x}\right)dx = -e\left[\ln|x|\right]_{-e^{n+1}}^{-e^{n}} = e$$

حساب العدد الحقيقي l : $l = A(0) + A(1) + ... + A(2016) = 2017e$.

حل مقترح للتمرين(11)(باك 2018)

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = 2 + (x-1)e^{-x}$

1)حساب النهايات :

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(2 + (x-1)e^{-x}\right) = -\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-1) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 + (x-1)e^{-x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 + xe^{-x} - e^{-x}\right) = 2$ ، لأن : $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$.

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة g:

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x)=e^{-x}+\left(-e^{-x}\right)(x-1)=(2-x)e^{-x}$.

لدينا :من أجل كل عدد حقيقي x : $e^{-x}>0$ و بالتالي إشارة $g'(x)$ من إشارة $2-x$.

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$g'(x)$	$+$ 0 $-$

الدالة g متناقصة على المجال $[2;+\infty[$ و متزايدة على المجال $]-\infty;2]$.

جدول تغيّر ات الدالة g :

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$g'(x)$	$+$ 0 $-$
$g(x)$	$-\infty$ ↗ $2+e^{-2}$ ↘ 2

3) أ - تبيان أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل في حلا وحيدا α حيث $-0.38<\alpha<-0.37$.

الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;2]$ و $]-0,38;-0,37[\subset]-\infty;2]$ و $\begin{cases} g(-0.38)\approx -0,017 \\ g(-0.37)\approx 0,016 \end{cases}$

أي $g(-0,38)\times g(-0,37)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.38<\alpha<-0.37$.

بـ - إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$ α $+\infty$
$g(x)$	$-$ 0 $+$

II) f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=2x+1-xe^{-x}$

1)أ- حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+1-xe^{-x}\right)=+\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x}=0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+1-xe^{-x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(2+\frac{1}{x}-e^{-x}\right)\right]=-\infty$.

بـ - $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-xe^{-x}\right)=0$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y=2x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

جـ - دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) بحيث : $(\Delta): y=2x+1$.

لدينا : $f(x)-y=f(x)-(2x+1)=-xe^{-x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $-x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0;1)$	(C_f) تحت (Δ)

2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $f'(x)=g(x)$ ،

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

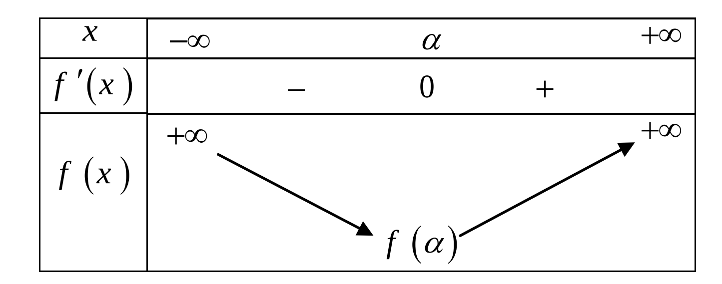
$f'(x)=2+(-1)e^{-x}+\left(-e^{-x}\right)(-x)=2+(x-1)e^{-x}=g(x)$.

- إتجاه تغيّر الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ، و منه نستنتج أن :

الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty;\alpha]$ و متزايدة على المجال $[\alpha;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة f :

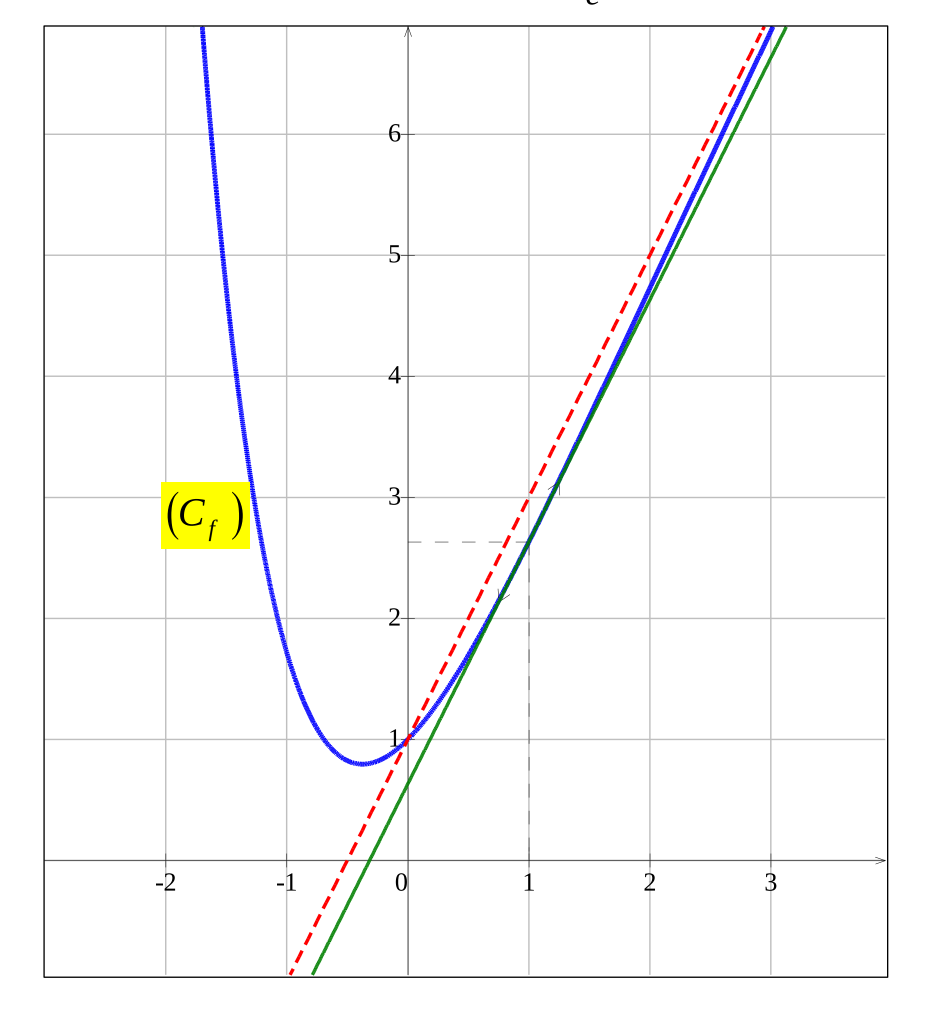


x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

3) كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

لدينا : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و منه $y=2x+1-\frac{1}{e}$ هي معادلة لـ (T).

4) الرسم :



5) المناقشة البيانية :

$x=(1-m)e^{x}$ تكافئ $xe^{-x}=(1-m)$ تكافئ $-xe^{-x}=m-1$ تكافئ $2x+1-xe^{-x}=2x+1+m-1$

أي $2x+1-xe^{-x}=2x+m$ أي : $f(x)=2x+m$ ⟵ مناقشة مائلة .

إذا كان $m\in\left]-\infty;1-\frac{1}{e}\right[$ فإن المعادلة لا تقبل حلول .

إذا كان $m=1-\frac{1}{e}$ المعادلة تقبل حل مضاعف .

إذا كان $m\in\left]1-\frac{1}{e};1\right[$ فإن المعادلة تقبل حلين موجبين تماما.

إذا كان $m=1$ فإن المعادلة تقبل حل واحد معدوم .

إذا كان $m\in\left]1;+\infty\right[$ فإن المعادلة تقبل حل واحد سالب تماما .

6)أ- تعيين دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^{-x}$ على $\mathbb{R}$ و التي تنعدم من أجل $x=1$.

الدالة $x \mapsto xe^{-x}$ مستمرة على $\mathbb{R}$ و بالتالي فدالتها الأصلية التي تنعدم عند1 هي الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ $F(x)=\int_1^x te^{-t}dt$.

نضع $u(t)=t$ ، $v'(t)=e^{-t}$ و منه $u'(t)=1$ ، $v(t)=-e^{-t}$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا:

$$F(x)=\left[-te^{-t}\right]_1^x-\int_1^x -e^{-t}dt=-xe^{-x}+e^{-1}-\int_1^x -e^{-t}dt=-xe^{-x}+e^{-1}-e^{-x}+e^{-1}=(-x-1)e^{-x}+2e^{-1}$$

و منه الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto xe^{-x}$ على $\mathbb{R}$ و التي تنعدم من أجل $x=1$ هي: $F(x)=(-x-1)e^{-x}+2e^{-1}$.

بـ- حساب العدد A مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها: $x=1$ ، $x=3$ و $y=2x+1$

$$A=\int_1^3((2x+1)-f(x))dx=\int_1^3 xe^{-x}dx=F(3)-F(1)=2e^{-1}-4e^{-3}(u.a)$$

حل مقترح للتمرين(12)(باك 2019)

$$f(x)=e^x-\frac{1}{2}ex^2 \quad \text{و} \quad g(x)=e^x-ex$$

1) أ - دراسة إتجاه تغيّر الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x)=e^x-e$

من أجل $x\in]-\infty;1]$ ، يكون $e^x\le e$ أي $g'(x)\le 0$ و بالتالي الدالة g متناقصة على المجال $]-\infty;1]$.

من أجل $x\in[1;+\infty[$ ، يكون $e^x\ge e$ أي $g'(x)\ge 0$ و بالتالي الدالة g متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

بـ - إستنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم x :

بما أن $g(1)=0$ و الدالة g متزايدة على المجال $[1;+\infty[$ و متناقصة على المجال $]-\infty;1]$ فإن 0 قيمة حدّية صغرى للدالة g .

إذن : من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x)\ge 0$.

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة f :

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=e^x-ex=g(x)$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)\ge 0$ و بالتالي الدالة f متزايدة على $\mathbb{R}$.

3) حساب النهايات :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x-\frac{1}{2}ex^2\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\frac{e^x}{x^2}-\frac{1}{2}e\right)\right]=+\infty$$ ، لأن : $\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty\\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x^2}\right)=+\infty\end{cases}$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^x-\frac{1}{2}ex^2\right)=-\infty$$ ، لأن : $\begin{cases}\lim_{x\to-\infty}e^x=0\\ \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}ex^2\right)=-\infty\end{cases}$

جدول تغيّرات الدالة f :

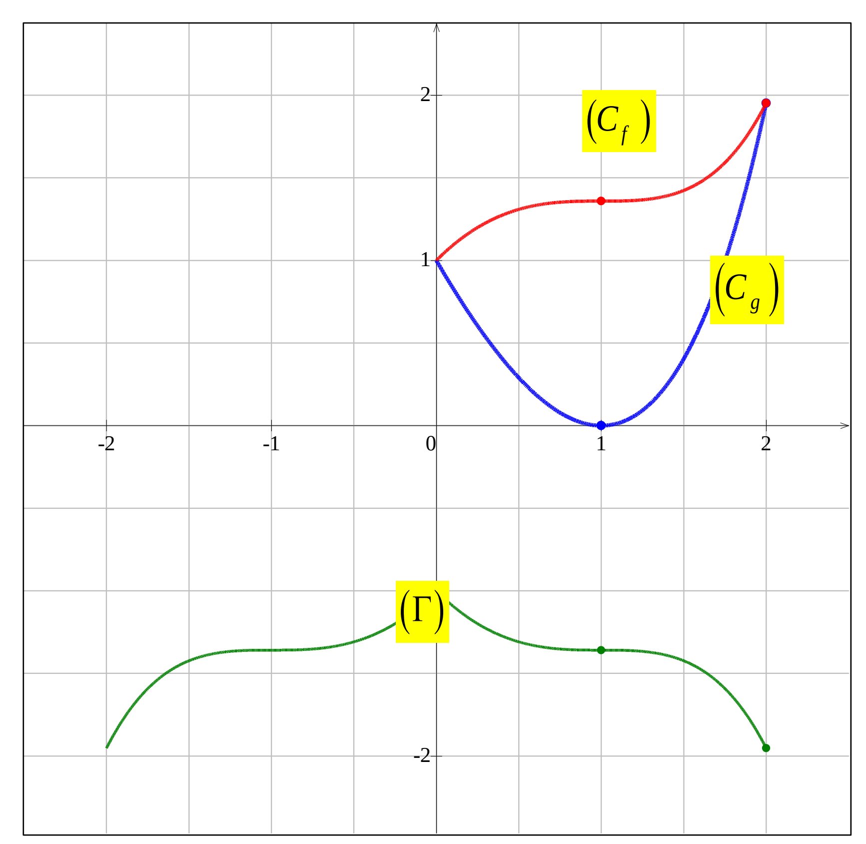
x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↗ $+\infty$

4) دراسة الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) على $\mathbb{R}$:

من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)-g(x)=e^x-\frac{1}{2}ex^2-(e^x-ex)=-\frac{1}{2}ex^2+ex=ex\left(-\frac{1}{2}x+1\right)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		(C_f)	(C_f) يقطع (C_g) $A(0;1)$	(C_f) فوق (C_g)	(C_f) يقطع (C_g) $B(2;e^2-2e)$	(C_f) تحت (C_g) تحت (C_g)	

5) الرسم :



6) حساب مساحة الحيز المحد

$$A=\int_0^2\left[f(x)-g(x)\right]dx=\int_0^2\left(-\frac{1}{2}ex^2+ex\right)dx=\left[-\frac{1}{6}ex^3+\frac{1}{2}ex^2\right]_0^2=-\frac{8}{6}e+2e=\frac{2e}{3}(u.a)$$

و منه $A=\frac{2e}{3}\times 4=\frac{8e}{3}cm^2$.

7) h الدالة المعرّفة على المجال $[-2;2]$ كما يلي : $h(x)=\frac{1}{2}ex^2-e^{|x|}$.

أ - تبيان أن الدالة h زوجية :

من أجل كل $x\in[-2;2]$ ، $-x\in[-2;2]$ و $h(-x)=\frac{1}{2}e(-x)^2-e^{|-x|}=\frac{1}{2}ex^2-e^{|x|}=h(x)$.

و منه الدالة h زوجية .

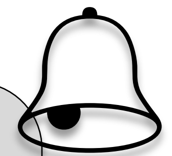
ب - من أجل $x\in[0;2]$ ، $h(x)+f(x)=\frac{1}{2}ex^2-e^x+e^x-\frac{1}{2}ex^2=0$.

استنتاج كيفية رسم (Γ) إنطلاقا من (C_f) :

من أجل $x\in[0;2]$ ، $h(x)=-f(x)$ و بالتالي (Γ) نظير (C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل على المجال $[0;2]$.

و لرسم (Γ) على المجال $[-2;0]$ نستخدم كون الدالة h زوجية .

الرسم :أنظر الشكل .



هذا العمل من طرف انسان و احتمال السهو فيه وارد فارجوا من القراء التبليغ

و التنبيه عبر البريد الالكتروني الخاص بالأستاذ شعبان أسامة

Chbnoussama@gmail.com

تجدون هذا الملف عبر مختلف منصات التواصل الاجتماعي للصفحة

